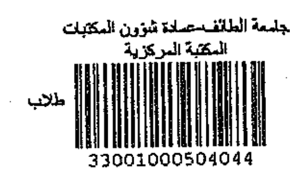
الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية

(بحوث العمليات)



تأليف

أكرم محمد عرفان المهتدي

جامعة البلقاء التطبيقية

الطبعة الأولى

2004 م - 1425هـ



دار صفاء للنشر والتوزيع - عمان

رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية (٢٠٠٤/٢/٢٤٢)

٦٥٨,٤٠٣
المهتدي ، أكرم محمد عرفان
الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإداريـة/ أكرم محمد عرفان المهتدي.- عمان: دار صفاء، ٢٠٠٤.
(   ) ص
ر. أ (٢٠٠٤/٢/٢٤٢)
الواصفات : / الإدارة // بحوث العمليات /

* تم إعداد بيانات الفهرسة الأولية من قبل دائرة المكتبة الوطنية

الطبعة الأولى
2004 م - 1425 هـ



دار صفـــاء للنشر والتوزيع
عمان - شارع السلط - مجمع الفحيص التجاري - هاتف وفاكس ٤٦١٢١٩٠
ص.ب ٩٢٢٧٦٢ عمان - الاردن
DAR SAFA Publishing - Distributing
Telefax: 4612190 P.O.Box: 922762 Amman - Jordan
http://www.darsafa.com
E-mail :safa@darsafa.com

ISBN 9957 - 24 - 142 - 0 ردمك

محتويات الكتاب

المقدمة

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على أشرف المرسلين سيدنا محمد وعلى آله وأصحابه أجمعين وبعد..

فقد تم بعون الله إنجاز الطبعة الأولى من هذا الكتاب الذي يقدم مجموعة من الأساليب والأدوات الكمية المستخدمة في إطار بحوث العمليات بأسلوب واضح ومبسط مدعم بالعديد من الأمثلة المحلولة مع شرح تفصيلي لكافة خطواتها ليتسنى لقارئه فهمهما بسرعة وبدون بذل جهد كبير، فعلم بحوث العمليات من العلوم التطبيقية الحديثة التي شاع استخدامها في المجالات المتعددة وخاصة في إدارة الأعمال. لهذا فقد جاء كتابنا هذا مشتملا على سبع وحدات مبتدئين بمفهوم بحوث العمليات وتطورها التاريخي ومراحل التحليل الكمي، ثم في الوحدة الثانية ثم تعريف البرمجة الخطية وخطوات صياغتها وطرق حلها وخاصة طريقة الرسم البياني والطريقة المبسطة في الوصول إلى الحل الأمثل. أما في الوحدة الثالثة فقد كان التركيز على توضيح حالات خاصة قد تظهر في البرمجة الخطية وكيف يمكن ملاحظتها من خلال الرسم البياني أو جداول السمبلكس. ثم في الوحدة الرابعة تم التعرض إلى النظرية الثنائية أو النموذج المقابل وأهميته في حل مسائل السمبلكس. أما في الوحدة الخامسة فقد كان التركيز على واحدة من أبرز المشكلات المؤثرة في التكاليف وهي مشاكل نقل السلع أو المواد من مصادرها إلى مراكز عرضها أو بيعها أو تخزينها. ثم في الوحدة السادسة تم معالجة مشكلة التعيين أو التخصيص الأمثل لعناصر الإنتاج. وفي الوحدة السابعة والأخيرة فقد تم عرض شبكات الأعمال كوحدة من أهم وسائل المراقبة على تنفيذ سير العمل ضمن الزمن المخصص أو المحدد له.

وفي الختام نسأل الله أن نكون قد وفقنا في عرض هذا الكتاب تحقيقاً للأهداف المرجوة منه والله من وراء القصد.

المؤلف

الوحدة الأولى

مفهوم بحوث العمليات ومراحل التحليل الكمي

مفهوم بحوث العمليات وتطورها التاريخي:

تعتبر الأساليب الكمية أو ما يعرف ببحوث العمليات من العلوم التطبيقية الحديثة في مجالات متعددة ومنها الإدارة، فهي تعتمد على مجموعة من الطرق والأساليب العلمية التي تساعد متخذ القرار على اختيار القرار الأمثل لحل المشكلة من بين الحلول المتعددة لها. ففي الواقع العملي يكون أمام متخذ القرار اختيارات متعددة من البدائل الممكنة لاتخاذ القرار بخصوص مشكلة معينة وهذا يجعل من الصعب عليه اختيار البديل الأمثل دون الاستعانة بأدوات وأساليب كمية تساعده على اتخاذ القرار الأمثل ومن هذه الأدوات أسلوب البرمجة الخطية وطريقة السمبلكس ونماذج النقل والتخصص وشبكات الأعمال وغيرها. فعلم بحوث العمليات هو عبارة على مجموعة الأدوات والأساليب الكمية المختلفة التي تستخدم للمساعدة في اتخاذ القرارات الإدارية المثلى لمعالجة المشكلات النابعة من محدودية الموارد لترشيدها وتحقيق الاستخدام الأمثل لها بما يضمن تحقيق أعلى فائدة مادية ممكنة منها. وقد وضعت جمعية بحوث العمليات البريطانية عدة مفاهيم لبحوث العمليات منها "عملية استخدام الأساليب العلمية في حل المشكلات المعقدة التي تنطوي على توظيف أعداد كبيرة من القوى العاملة والمعدات والمواد الأولية في المصانع والمؤسسات الحكومية وفي القوات المسلحة".

يمكن القول بأن البداية الحقيقية لظهور علم بحوث العمليات كان خلال الحرب العالمية الثانية بسبب المجهود الحربي للجيش البريطاني الذي تطلب تعبئة كافة الموارد النادرة بشكل أمثل خلال الحرب ومحاولة تخصيص هذه الموارد بما يخدم كافة العمليات العسكرية دون هدر أو ضياع، حيث استدعت السلطات البريطانية عدداً من الخبراء والعلماء لدراسة معطيات العمليات العسكرية بهدف تحقيق الاستخدام الأمثل للمعدات والوسائل القتالية المحدودة

من أجل تحقيق أفضل النتائج العسكرية بأقل خسارة مادية وبشرية ممكنة، وكنتيجة للبحوث التي قدمها هؤلاء الخبراء كسب الحلفاء العديد من المعارك فكانت بذلك الانطلاقة الأولى نحو توجيه مثل هذه البحوث للمجالات غير العسكرية كالاقتصادية والمالية والإدارية وغيرها لمساعدة المدراء في عملية اتخاذ القرارات، فمن أبرز المجالات التطبيقية لبحوث العمليات في الإدارة هي مشكلات المخزون ومشكلات تخصيص الموارد ومشكلات الإحلال أو الاستبدال ومشكلات المنافسة.ومن الأمور الأساسية التي ساعدت على انتشار تطبيق أساليب بحوث العمليات في المجالات المختلفة هو العمل المستمر للعلماء والباحثين لتطوير أدوات التحليل الكمي واستحداث أساليب ووسائل جديدة. كما كان لظهور الحاسبات الإلكترونية دور بارز في تطور وانتشار الأساليب الكمية من خلال قدرته على حل النماذج الرياضية المعقدة للمشاكل الإدارية الكبيرة.

مراحل التحليل الكمي:

تقوم المنهجية العلمية لبحوث العمليات في عملية اتخاذ القرارات على الخطوات التالية:

1-تعريف وتحديد المشكلة موضوع القرار:

أي أن يتم تعريف المشكلة الذي سيتخذ القرار فيها لأن ذلك يقود إلى الهدف الذي تسعى الإدارة لتحقيقه. فلو كانت المشكلة إنتاجية تتعلق بخط إنتاجي معين فإن الهدف هو تحديد أفضل كمية إنتاجية ستنجم عن تشغيل هذا الخط بحيث تحقق الشركة أهدافها في الحصول على أعلى ربح ممكن أو أقل تكلفة ممكنة. فتحديد وتشخيص المشكلة من المهام الأولى في عملية اتخاذ القرار الإداري.

2- بناء النموذج الرياضي للمشكلة:

بعد الانتهاء من تحديد المشكلة موضوع القرار وبيان العلاقات المتداخلة فيها،يتم وضع المشكلة بصيغة نماذج رياضية تمثل مكونات المشكلة المراد حلها،وتشتمل على متباينة الهدف المطلوب تحقيقه ومتباينات القيود الملازمة للمشكلة التي تحكم الإدارة في اتخاذ القرار.

3- حل النموذج:

بعد صياغة النموذج الرياضي يتم حله لاستخراج النتائج الأولية وتحديد كونه أمثلاً أم لا، فإذا لم يكن كذلك فالأمر يتطلب تطويره حتى الوصول إلى الحل الأمثل لأنه المحقق للأهداف المقترحة.

4-تطبيق الحل:

بعد الوصول إلى الحل الأمثل نظريا يتم تطبيق الحل الأمثل عملياً من خلال مجموعة الإجراءات والتعليمات الذي يقدمها متخذ القرار للعاملين للتقيد بها مراعياً توفر المهارات والمستلزمات الضرورية التي يتطلبها التنفيذ، ثم متابعة التنفيذ للتأكد من أن القرار المتخذ كان فعلاً هو العلاج للمشكلة.

الوحدة الثانية

البرمجة الخطية

Linear Programming

مقدمة:

البرمجة الخطية هي أحد الأساليب الرياضية المهمة لبحوث العمليات وتعرفُ بأنها أسلوب رياضي يساهم في عملية اتخاذ القرارات الإدارية التي تهدف إلى إيجاد الحل الأمثل لكيفية توزيع الموارد (البشرية والمادية) المتاحة بين أفضل الاستخدامات ضمن مجموعة من القيود التي تحد من درجة تحقيق هذا الهدف. وتشير كلمة خطية إلى أن العلاقات بين المتغيرات المكونة للمشكلة هي علاقة خطية، أما كلمة برمجة فتشير إلى التكنيك الرياضي المستخدم في إيجاد الحل أي وضع المشكلة بصيغة رياضية أو نموذج رياضي وحلها.

خطوات صياغة نموذج البرمجة الخطية:

لحل أية مشكلة باستخدام البرمجة الخطية يتعين القيام بعدة خطوات تمثل مكونات نموذج البرمجة الخطية وهذه الخطوات هي:

1- تحديد الهدف المنشود من وراء حل المشكلة:

وهناك نوعان من الأهداف للمشكلة المراد حلها بهذا الأسلوب هما تعظيم الأرباح إلى أقصى حد أو تخفيض التكاليف إلى أدنى مستوى،ويصاغ الهدف من وراء حل المشكلة ضمن النموذج الرياضي للمشكلة على شكل دالة خطية تسمى دالة الهدف Objective Function.

2-تحديد القيود Constraints:

وهي مجموعة المحددات التي تحد من درجة تحقيق الأهداف، وعملية تحقيق الهدف تشترط الاستجابة لهذه المتطلبات بشكل جماعي وهنالك ثلاثة أنواع من القيود.

أ-قيد يتضمن أصغر أو يساوي (≤)، وهذا القيد يتضمن حداً أعلى لكميات الموارد المتاح استخدامها لا يجوز تجاوزه.

ب- قيد يتضمن أكبر أو يساوي (≥)، وهذا القيد يتضمن الحد الأدنى الواجب تحقيقه.

جـ- قيد يتضمن المساواة (=)، وهذا القيد يستوجب تحديد كميات الموارد المتاحة للاستخدام بدقة وبالضبط.

3-شرط عدم السالبية Non - negativity Constraints:

ويعني هذا الشرط أن جميع قيم المتغيرات في المشكلة قيد الدرس حقيقية وغير سالبة أي يجب أن تكون القيم موجبة أو صفرية (انظر صفحة 34).

ولتوضيح عملية صياغة نموذج البرمجة الخطية نفترض المثال التالي:

مصنع يقوم بإنتاج نوعين من الأجهزة الكهربائية هما X_1, X_2 وكل نوع يمر في إنتاجه على ثلاثة أقسام (A, B, C)حيث أقصى طاقة تشغيلية للأقسام الثلاثة هي 70، 105، 126 ساعة إسبوعياً على التوالي. فإذا علمت أن الجهاز الاول X_1 يحتاج إلى 7 ساعات في القسم الأول و 9 ساعات في القسم الثاني و 4 ساعات في القسم الثالث. والجهاز الثاني X_2 يحتاج إلى 5 ساعات في القسم الأول و 12 ساعة في القسم الثاني و 3 ساعات في القسم الثالث.فإذا كان ربح الجهاز الواحد من X_1 هو (25) دينار وربح الجهاز الواحد من X_2 هو (18) دينار.

المطلوب:

اكتب صيغة نموذج البرمجة الخطية الذي يمثل المزيج السلعي من X_1, X_2 الذي يحقق للمصنع أعلى ربح ممكن ضمن القيود المفروضة.

الحل:

يفضل في البداية وضع معطيات السؤال على هيئة جدول لتسهيل عملية السير في خطوات صياغة النموذج الرياضي المطلوب كما يلي:

القسم	الوقت اللازم لكل سلعة		أقصى طاقة تشغيلية
	X_1	X_2	
A	7	5	70
B	9	12	105
C	4	3	126

خطوات صياغة النموذج الرياضي لهذا المثال:

1- تحديد دالة الهدف.

$$Max.\ Z = 25X_1 + 18X_2$$

2- تحديد القيود.

أ- القيد الأول (قيد القسم الأول)

إن أقصى طاقة تشغيلية للقسم الأول هو 70 ساعة أسبوعياً، وحيث أن الجهاز X_1 يحتاج إلى (7) ساعات في القسم A والجهاز X_2 يحتاج إلى (5) ساعات في نفس القسم، بالتالي تكون صياغة القيد الأول كما يلي:

$$7X_1 + 5X_2 \leq 70$$

ب- القيد الثاني (قيد القسم الثاني)

$$9X_1 + 12X_2 \leq 105$$

جـ- القيد الثالث (قيد القسم الثالث)

$$4X_1 + 3X_2 \leq 126$$

3- شرط عدم السالبية.

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

وقد تحقق هذا الشرط في كافة القيود، لأن قيم X_1 و X_2 جميعها موجبة.

ومما تقدم فإن نموذج البرمجة الخطية للمشكلة أعلاه هو:

$$Max.\ Z = 25X_1 + 18X_2$$

Subject to,

$$7X_1 + 5X_2 \leq 70$$

$$9X_1 + 12X_2 \leq 105$$

$$4X_1 + 3X_2 \leq 126$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

طرق حل مشاكل البرمجة الخطية:

يمكن حل مشاكل البرمجة الخطية بالطرق التالية:

1- طريقة الرسم البياني Graphic Solution

2- طريقة الحل الجبري Algebraic Solution

3- الطريقة المبسطة Simplex method

طريقة الرسم البياني:

تستخدم هذه الطريقة عندما تحوي المشكلة على متغيرين فقط وبموجبها يتم رصد أحد المتغيرين على المحور الأفقي والآخر على المحور العامودي ثم تمثيل قيود المشكلة على الرسم البياني لتحديد منطقة الحل المكن (R) كخطوة نحو الوصول إلى الحل الأمثل. وعملية تمثيل قيود المشكلة تتم على خطوات هي:

أ- تحويل متباينات القيود إلى معادلات، وعملية التحويل هذه تجعل القيد في صيغة معادلة خطية يمكن تمثيلها بخط مستقيم.

ب- تحديد نقاط تقاطع كل قيد مع المحورين والتوصيل بين هاتين النقطتين بخط مستقيم لكل قيد.

وتسمى المنطقة التي تشترك فيها جميع القيود المتعلقة بالمشكلة بمنطقة الحلول الممكنة (R) مع ملاحظة أنه:

1- إذا كانت علاقات القيود من نوع أصغر أو يساوي (≤)، وهي في الغالب مترافقة مع مسائل البرمجة الخطية التي يكون هدفها التعظيم، فإن منطقة الحل الممكنة يجب أن تكون محدودة من اليمين وباتجاه نقطة الأصل وبالتالي فهي تأخذ شكل المضلع، والحل الأمثل يقع على أحد نقاط زوايا هذا المضلع الأبعد عن نقطة الأصل.

2- إذا كانت علاقات القيود من نوع أكبر أو يساوي (≥) وهي في الغالب مترافقة مع مسائل البرمجة الخطية التي يكون هدفها التصغير، فإن منطقة الحل الممكن تكون خارج المضلع بدلاً من أن تقع داخله أي أن منطقة الحل الأمثل تكون غير محدودة من اليمين ونقطة الحل الأمثل هي الأقرب إلى نقطة الأصل.

3- إذا كانت علاقات القيود في المشكلة خليط من (≥، ≤) معاً، فإنها تكون مترافقة مع مسائل البرمجة الخطية بنوعيها التعظيم والتصغير، ولهذه الحالة منطقة حل ممكنة على شكل مضلع.

4- إذا كانت علاقات القيود في المشكلة خليط من (≥ ، ≤، =) معاً، فإن الاحتمالات المرجحة هي:

أ- وجود قيود تشتمل على متغير واحد بعلاقات مختلطة من (≥ ، ≤) وقيد آخر يشتمل على متغيرين بعلاقة مساواة، وفي مثل هذه الحالة ليس للمشكلة منطقة حل ممكنة وإنما نقاط حل ممكنة.

ب- وجود قيود تشتمل على أكثر من متغير واحد بعلاقات مختلطة من (≥ ، ≤) وقيد آخر يشتمل على متغيرين بعلاقة مساواة، وفي مثل هذه الحالة فإن للمشكلة منطقة حل ممكنة.

مثال (1):

أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة الرسم البياني:

$$\text{Max. } Z = 6X_1 + 4X_2$$

Subject to,

$$2X_1 + 4X_2 \le 20$$

$$5X_1 + 3X_2 \le 30$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

الحل:

تطبق الخطوات التالية للوصول إلى الحل الأمثل:

1- تحويل متباينات القيود إلى معادلات كما يلي:

$$2X_1 + 4X_2 = 20$$

$$5X_1 + 3X_2 = 30$$

2- تحديد نقاط تقاطع متغيرات القيود مع المحاور كما يلي:

$2X_1 + 4X_2 = 20$ ....(1)

If $X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 5$

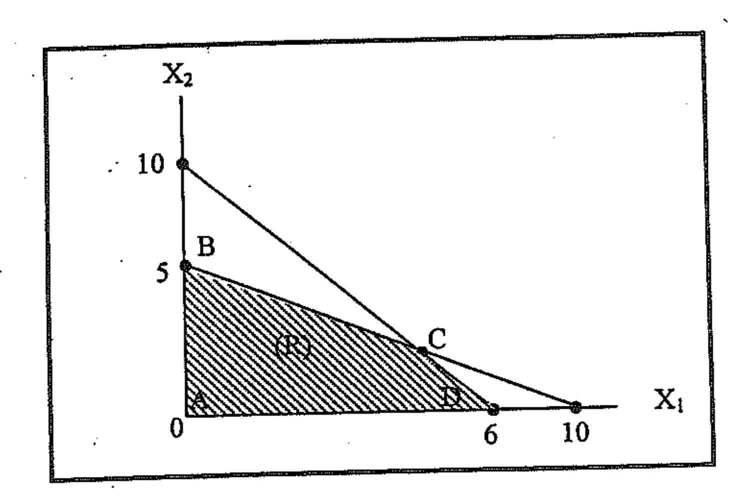
$X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 10$

$5X_1 + 3X_2 = 30$ ....(2)

If $X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 10$

$X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 6$

3- رسم القيود على الشكل البياني بعد أن تم تحديد نقاط التقاطع وتحديد منطقة الحل الممكن كما يلي:



ومنطقة الحل الممكن هو المضلع ABCD

4- تحديد الحل الأمثل والذي يقع على أحد نقاط زوايا المضلع.

يتم تحديد نقطة الحل الأمثل من بين النقاط الأربعة من خلال:

أ- إيجاد قيم متغيرات النقاط.

ب- اختيار أكبر قيمة بعد تعويضهم في دالة الهدف.

النقاط	قيم إحداثيات النقاط		قيمة دالة الهدف (Z)
	X1	X2	$Z = 6X_1 + 4X_2$
A	0	0	Z = 0
B	0	5	Z = 20
C	؟	؟	Z = ?
D	6	0	Z = 36

نلاحظ من مضلع منطقة الحلول الممكنة أن تحديد قيم إحداثيات النقاط D, B, A يمكن ملاحظتها مباشرة من الرسم، أما النقطة (C) وهي النقطة المتولدة من تقاطع مستقيم القيد الأول مع مستقيم القيد الثاني فلا يمكن تقديرها مباشرة من الرسم، ويتم إيجاد قيم إحداثيات هذه النقطة من خلال حل معادلات المستقيمين المتقاطعين كما يلي:

$2X_1 + 4X_2 = 20$ ....(1)

$5X_1 + 3X_2 = 30$ ....(2)

نضرب المعادلة (1) بـ (3) ونضرب المعادلة (2) بـ (-4) ونجمع المعادلتين للتخلص من أحد المتغيرات كما يلي:

$6X_1 + 12X_2 = 60$ ....(3)

$-20X_1 - 12X_2 = -120$ ....(4)

$-14X_1 = -60$

$$X_1 = \frac{-60}{-14} = 4.3$$

نعوض قيمة X_1 في أحد المعادلات لمعرفة قيمة X_2.

$2X_1 + 4X_2 = 20$

$2(4.3) + 4X_2 = 20$

$8.6 + 4X_2 = 20$

$4X_2 = 11.4$

$X_2 = 2.9$

أي أن قيم إحداثيات النقطة C هي (2.9و 4.3)، وبتعويض هذه القيم في معادلة دالة الهدف نحصل على:

$Z = 6X_1 + 4X_2$

$Z = 6(4.3) + 4(2.9)$

$Z = 37.4$

وبمقارنة قيم البدائل الأربعة، نجد أن البديل الأفضل هو عند النقطة C حيث تعطي أكبر قيمة لـ Z.

مثال2:

أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة الرسم البياني.

$\text{Min. } Z = 0.75X_1 + 0.85X_2$

S.T

$8X_1 + 4X_2 \geq 100$

$2X_1 + 4X_2 \geq 70$

$2X_1 + 8X_2 \geq 90$

$X_1, X_2 \geq 0$

الحل:

$8X_1 + 4X_2 = 100$ ....(1)

If $X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 25$

$X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 12.5$

$2X_1 + 4X_2 = 70$ ....(2)

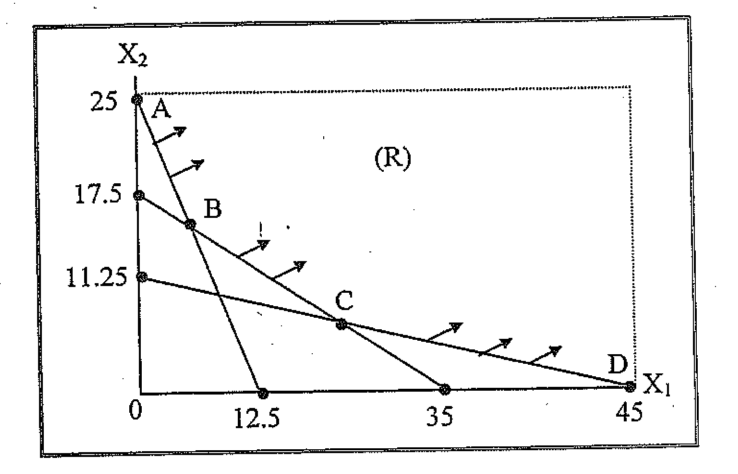
If $X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 17.5$

$X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 35$

$2X_1 + 8X_2 = 90$ ....(3)

If $X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 11.25$

$X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 45$



نلاحظ أن منطقة الحل الممكن قد تحددت بالمنطقة البعيدة عن نقطة الأصل وذلك لأن المتباينات في هذه المشكلة من نوع أكبر أو يساوي (≤) وبالتالي فإن الحل الأمثل يقع على الحدود الداخلية لهذه المنطقة والتي يمكن تحديدها بالنقاط ABCD.

حيث إحداثيات النقطة A هي (0 ،25)

والنقطة D هي (0، 45)

أما النقاط B و C فلا يمكن تحديد إحداثياتهم مباشرة من الرسمة، الأمر الذي يتطلب استخراجهم من خلال حل المعادلات كما يلي:

❖ النقطة C متولدة من تقاطع مستقيم القيد الثاني والثالث

$2X_1 + 4X_2 = 70$

$2X_1 + 8X_2 = 90$

وبعد القيام بالحل الجبري لهما، سنجد أن:

$X_1 = 25$

$X_2 = 5$

❖ النقطة B متولدة من تقاطع مستقيم القيد الأول والثاني

$8X_1 + 4X_2 = 100$

$2X_1 + 4X_2 = 70$

وبعد القيام بالحل الجبري لهما، سنجد أن:

$X_1 = 5$

$X_2 = 15$

وبتعويض قيم إحداثيات الزوايا الأربعة A, B, C, D في دالة الهدف، نتوصل إلى الحل الأمثل والذي سيتحقق عند النقطة C لأنها أقل تكاليف كما يظهر في الجدول التالي:

النقاط	قيم إحداثيات النقاط		قيمة دالة الهدف (Z)
	X_1	X_2	Min. $Z = 0.75X_1 + 0.85X_2$
A	0	25	$Z = 33.75$
B	5	15	$Z = 23$
C	25	5	$Z = 16.5$
D	45	0	$Z = 21.25$

مثال 3:

أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة الرسم البياني:

Min $Z = 5X_1 + 8X_2$

S.T

$X_1 \leq 4$

$X_2 \geq 2$

$X_1 + X_2 = 5$

$X_1, X_2 \geq 0$

الحل:

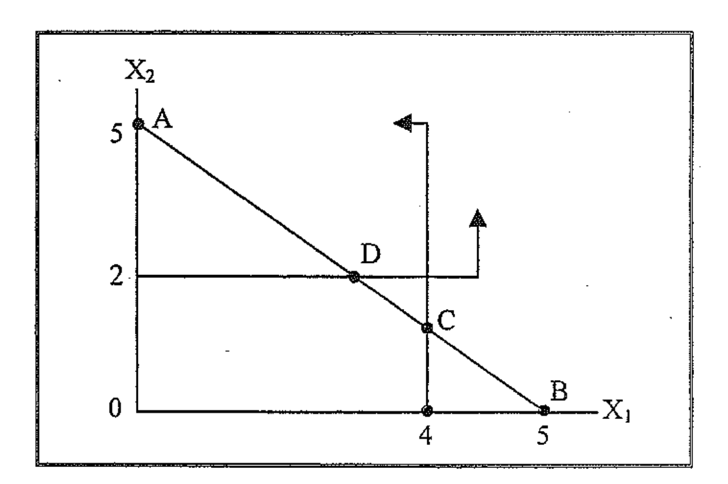
$X_1 = 4$ ....(1)

$X_2 = 2$ ....(2)

$X_1 + X_2 = 5$ ....(3)

If $X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 5$

$X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 5$



وحيث أن القيد الثالث قيد مساواة أي أنه مكتوب بصيغة معادلة وليس متباينة، فإن المساحة تمثل الخط المستقيم نفسه مما يعني عدم وجود منطقة حلول ممكنة إنما نقاط حلول ممكنة وهي النقاط A , D.

النقاط	X_1	X2	$Z = 5X_1 + 8X_2$
A	0	5	$Z = 40$
D	?	?	$Z = ?$

$X_1 + X_2 = 5$

وعند النقطة D في الرسم فإن $X_2 = 2$

$\Rightarrow X_1 = 5 - 2 = 3$

$\Rightarrow Z = 5(3) + 8(2)$

$Z = 15 + 16 = 31$

ولأن المشكلة هي تقليل، فإن الحل الأمثل يتحقق عند النقطة D لان قيمة دالة الهدف أقل.

الطريقة المبسطة Simplex Method:

تعد هذه الطريقة من أهم الطرق المستخدمة في حل مشكلات البرمجة الخطية لكونها تتميز بدرجة عالية من الدقة والكفاءة، كما يمكن استخدامها لأي عدد من المتغيرات والقيود بعكس طريقة الرسم البياني التي تستخدم فقط عندما تحوي المشكلة على متغيرين فقط.

إن الوصول إلى الحل النهائي الأمثل للمشكلة المتمثلة في تعظيم الهدف أو تصغيره عند استخدام هذه الطريقة يتم على خطوات نظامية متتابعة تبدأ بالحل الممكن الأولي (An Initial Basic Feasible solution) مروراً بالحل الأفضل لغاية الوصول إلى الحل الأمثل (Optimal solution).

خطوات الوصول إلى الحل الأمثل (تعظيم أو تصغير):

أ- الوصول إلى الحل الأمثل (تعظيم) في ظل شرط المحدودية أصغر أو يساوي ≤ .

الخطوة الأولى: إيجاد النموذج القياسي للمشكلة:

وهو يعني تحويل المتباينات الرياضية المعبرة عن المشكلة التي تحتوي على علاقة ≤ أو ≥ إلى الحالة المستقرة (الشكل القياسي أو النموذج القياسي) وهي الحالة المكتوبة بعلاقة (=).

1- النموذج القياسي للقيود في ظل (≤).

إن القيود من نوع أصغر أو يساوي (≤) تعني أن الجهة اليسرى من متباينة القيد أصغر من الجهة اليمنى، وتحقيق المساواة يتم عن طريق إدخال متغير بإشارة موجبة إلى الجهة اليسرى من المتباينة يساوي الفرق بين الجهة اليمنى واليسرى لها، ويرمز له بالرمز (S). والعلاقة من النوع (≤) الموجود في القيد تعني أن الكميات المستخدمة من مورد معين لن تزيد عن الكميات المتوفرة أو المتاحة ولكن يمكن أن تقل عنها. وبالمعنى الاقتصادي فإن (S) تمثل الكميات غير المستخدمة من الموارد المتاحة لذلك فإنها تسمى متغيرات راكدة (Slack Variables) أي موارد متوفرة وبقيت دون استخدام.

مثال: حول متباينة القيد التالي إلى الشكل القياسي :

$$3X_1 + 4X_2 \leq 12$$

الحل:

حيث أن علاقة المتباينة من نوع (≤)، فهذا يعني أن الجانب الأيسر أصغر من الجانب الأيمن، ولتحقيق المساواة، يتم إضافة المتغير الراكد (S) إلى الجانب الأيسر ليصبح الشكل القياسي للقيد كما يلي:

$$3X_1 + 4X_2 + S = 12$$

وحيث أن الحل الأساسي الأولي يتطلب أن تكون قيم X_1 و X_2 مساوية للصفر في بداية الحل، فإن هذا يعني أن قيمة المتغير الإضافي (S) موجبة تساوي (12) وهذا لم ينافي شرط عدم السلبية.

2- النموذج القياسي للجانب الأيمن من القيود:

إن النموذج القياسي للمشكلة يتطلب أيضاً أن يكون الجانب الأيمن من القيود موجبة أو مساوية للصفر. فإذا كانت سالبة فيجب تحويلها إلى موجبة وذلك بضرب طرفي متباينة القيد بـ (-1) ثم قلب إشارة المتباينة من (≤) إلى (≥) أو العكس ثم تحويلها إلى الشكل القياسي.

مثال: المتباينة التالية تمثل أحد القيود في مشكلة برمجة خطية:

$$X_1 + 2X_2 \geq -3$$

المطلوب: حول هذه المتباينة إلى الشكل القياسي.

الحل:

$$-1\,[\,X_1 + 2X_2 \geq -3\,]$$

$$-X_1 - 2X_2 \leq 3$$

وبالتالي فإن الشكل القياسي هو:

$$-X_1 - 2X_2 + S = 3$$

3- النموذج القياسي لدالة الهدف:

أما الشكل القياسي لدالة الهدف فهو دالة الهدف الأصلية مضاف إليها متغيرات راكدة (S) موجبة وبمعاملات صفرية مساوية لعدد القيود في المشكلة قيد الدرس.

الخطوة الثانية: إيجاد حل أساسي أولي ممكن:

بعد تحويل متباينات القيود ودالة الهدف إلى الشكل القياسي، يتم تفريغ البيانات الواردة في النموذج القياسي في جدول خاص يطلق عليه اسم الجدول البسيط (Simplex table) أو جدول الحل الأساسي الأولي وهو يأخذ النموذج التالي:

C		C_1	C_2.........C_m	0	0.....0	قيم المتغيرات الأساسية (b)	النسب Ratio
		X_1	X_2.........X_m	S_1	S_2....Sn		
0	S_1	a_{11}	a_{12}	... a_{1m}		b_1	
0	S_2	a_{21}	a_{22}	...a_2m		b_2	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	
0	S_n	an_1	an_2	anm		b_n	
Z							قيمة دالة الهدف
C-Z							

وتعتبر عملية المباشرة في الحل ممكنة إذا استوفى هذا الجدول الشرط التالي:

$$b_1, b_2 \ldots b_n \geq 0$$

بمعنى أن قيم جميع المتغيرات الأساسية $S_1, S_2, \ldots, S_n$ غير سالبة لأن وجود قيم سالبة سيخالف شرط اللاسلبية.

الخطوة الثالثة: التحقق من الأمثلية

قد يكون جدول الحل الأساسي الأولي أعلاه أمثلياً أو قد لا يكون، والحكم على هذا الأمر يتم من خلال النظر إلى صف (C-Z) الذي يمثل المساهمة الصافية التي تنتج من إضافة وحدة واحدة من المتغير (X) إلى دالة الهدف.وفي

حالة التعظيم التي نحن بصددها، فإذا كانت قيم كافة المعاملات الواردة في هذا الصف صفرية أو سالبة فهذا يعني أننا توصلنا إلى الحل الأمثل، أما إذا كانت قيمة أحد المعاملات موجبة، فهذا يعني أن الحل في هذه المرحلة ليس هو الأمثل وهذا يتطلب تحسين أو تطوير الحل.

الخطوة الرابعة:تحسين الحل:

لأن الهدف هو التعظيم، فإن الحل الأمثل يتحقق كما ذكرنا عندما تكون كافة المعاملات في صف (C-Z)إما صفرية أو سالبة. وغير ذلك يعني عدم تحقق الأمثلية وهذا يتطلب تحسين الحل. وتحسين الحل يتم من خلال اختيار متغير داخل Incoming Variable من بين المتغيرات غير الأساسية $X_1, X_2, \ldots X_m$ من شأنه أن يحقق أكبر مساهمة في دالة الهدف ليحمل محل أحد المتغيرات الأساسية $S_1, S_2, \ldots S_n$ ويسمى المتغير غير الأساسي الذي سيدخل بالمتغير الداخل والمتغير الأساسي الذي يخرج فيسمى بالمتغير الخارج Outgoing variable.أي أن تطوير الحل يتطلب إدخال متغيرات غير أساسية وإخراج متغيرات أساسية.

كيف يتم تحديد المتغير الداخل؟

إن المتغير غير الأساسي الذي سيدخل الحل هو ذلك المتغير الذي يرتبط بصف (C-Z) بأكبر قيمة موجبة، ويسمى العمود الواقع فيه هذا المتغير بالعمود المحوري (Pivot column).

كيف يتم تحديد المتغير الخارج؟

إن المتغير الخارج هو المتغير الذي له أصغر ناتج موجب من حاصل قسمة قيم المتغيرات الأساسية $b_1, b_2, \ldots, b_n$ على القيم المناظرة لها في العمود المحوري. مع إهمال المتغيرات ذات القيم السالبة أو الصفرية. ويسمى الصف الذي يقع فيه المتغير الخارج بالصف المحوري (Pivot row).

وبعد تحديد العمود المحوري والصف المحوري فإن العنصر الذي يتقاطع عنده المحورين يسمى بالعنصر المحوري (Pivot element).

الخطوة الخامسة: إجراء عمليات حسابية لإيجاد حل أساسي جديد يحسن من قيمة دالة الهدف.

إن هذه الخطوة تتطلب القيام بعدة خطوات متتابعة وهذه الخطوات هي:

1- تقسيم عناصر الصف المحوري على العنصر المحوري لتحديد قيم المتغير الداخل، وتسمى القيم الجديدة المتولدة عن القسمة بمعادلة المحور (Pivot equation).

2- استخراج القيم الجديدة للمتغيرات الأساسية $S_1, S_2, \dots S_n$ التي لم تخرج. تتم هذه الخطوة على كافة قيم المتغيرات الأساسية وفق المعادلة التالية:

قيم القيد S الجديدة = قيم القيد S القديمة - [معامل المتغير الداخل X في القيد S] [معادلة المحور].

3- استخراج القيم الجديدة لـ Z.

وسيتم توضيح هذه الخطوة من خلال المثال الرقمي اللاحق.

4- استخراج قيم C-Z الجديدة.

بعد استخراج قيم (C-Z) الجديدة، ننظر إلى هذه القيم، فإذا كانت جميعها صفرية أو سالبة نكون بذلك قد توصلنا إلى الحل الأمثل لحالة التعظيم.

مثال: أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية باستخراج طريقة السمبلكس:

$$Max.\ Z = 30X_1 + 36X_2$$

S.T

$$6X_1 + 9X_2 \leq 4500$$

$$9X_1 + 6X_2 \leq 4500$$

$$3X_1 + 3X_2 \leq 1800$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل:

الخطوة الأولى: إيجاد النموذج القياسي للمشكلة:

إن النموذج القياسي لدالة الهدف والقيود هو كما يلي:

$$Max.\ Z = 30X_1 + 36X_2 + OS_1 + OS_2 + OS_3$$

S.T

$$6X_1 + 9X_2 + 1S_1 + OS_2 + OS_3 = 4500$$

$$9X_1 + 6X_2 + OS_1 + 1S_2 + OS_3 = 4500$$

$$3X_1 + 3X_2 + OS_1 + OS_2 + 1S_3 = 1800$$

الخطوة الثانية: إيجاد حل أساسي أولي ممكن:

ويتم ذلك بتفريغ قيم المتغيرات الواردة في الشكل القياسي للمشكلة في جدول الحل الأساسي الأولي كما يلي:

C		30	36	0	0	0	
		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	b
O	S_1	6	(9)	1	0	0	4500
O	S_2	9	6	0	1	0	4500
O	S_3	3	3	0	0	1	1800
Z		0	0	0	0	0	0
C-Z		30	36	0	0	0	

الخطوة الثالثة: التحقق من الأمثلية:

عند النظر إلى جدول الحل الأساسي الأولي الممكن في الخطوة السابق نجد أن القيم في صف (C-Z) ليست صفرية أو سالبة كما يشترط الحل الأمثل في حالة التعظيم وإنما صفرية وموجبة الأمر الذي يتطلب تحسين الحل. فالقيم 30 و 36 في صف C-Z تعني أن إضافة وحدة من X_1 إلى دالة الهدف وإضافة وحده من X_2إلى الدالة أيضاً ستزيد الهدف (الأرباح مثلاً) بمقدار 30 و 36 ديناراً على التوالي.

الخطوة الرابعة: تحسين الحل:

يتطلب هذا الأمر تحديد المتغير الداخل والمتغير الخارج والعنصر المحوري للوصول إلى المعادلة المحورية.

- المتغير الداخل هو X_2 لأن له أكبر قيمة موجبة في صف C-Z.
- المتغير الخارج هو S_1 لأن له أصغر قيمة بعد قسمة قيم المتغيرات الأساسية على القيم المناظرة لها في العمود المحوري

والعنصر المحوري هو العدد (9) حيث تقاطع عنده العامود المحوري مع الصف المحوري.

الخطوة الخامسة:إيجاد حل أساسي جديد:

أي استخراج قيم المتغير الداخل (معادلة المحور) والقيم الجديدة لكل من المتغيرات الأساسية S3, S2 التي لم تخرج ولكلٍ من Z , C- Z

❖ قيم المتغير الداخل (معادلة المحور) هي:

6/9 , 9/9, 1/9, 0, 0, 500

❖ قيم S_3, S_2الجديدة:

S_2 الجديدة = S_2 القديمة –[معامل المتغير الداخل X_2 في القيد S_2] [معادلة المحور]

$$= [9, 6, 0, 1, 0, 4500] - [6]\,[\tfrac{2}{3}, 1, \tfrac{1}{9}, 0, 0, 500]$$

$$= [9, 6, 0, 1, 0, 4500] - [4, 6, \tfrac{2}{3}, 0, 0, 3000]$$

$$= [5, 0, -\tfrac{2}{3}, 1, 0, 1500]$$

S_3 الجديدة = S_3 القديمة –[معامل المتغير الداخل X_2 في القيد S_3] [معادلة المحور]

$$= [3, 3, 0, 0, 1, 1800] - [3]\,[\tfrac{2}{3}, 1, \tfrac{1}{9}, 0, 0, 500]$$

$$= [3, 3, 0, 0, 1, 1800] - [2, 3, \tfrac{1}{3}, 0, 0, 1500]$$

$$= [1, 0, -\tfrac{1}{3}, 0, 1, 300]$$

وبعد معرفة قيم المتغير الداخل والقيم الجديدة لكل من S_3, S_2 يتم تفريغ هذه القيم في جدول حل أساسي جديد ليظهر لنا كما يلي:

C		30	36	0	0	0	
		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	b
36	X_2	2/3	1	1/9	0	0	500
O	S_2	5	0	-2/3	1	0	1500
O	S_3	1	0	-1/3	0	1	300
Z		?	?	?	?	?	?
C-Z		?	?	?	?	?	-

❖ قيم Zالجديدة:

(36) (2/3) + (0) (5) + (0) (1) = 24

$(36)(1) + (0)(0) + (0)(0) = 36$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$(36)(500) + (0)(1500) + (0)(300) = 18000$

❖ استخراج قيم C-Z وهي:

$30 - 24 = 6$

$36 - 36 = 0$

$0 - 4 = -4$

$0 - 0 = 0$

$0 - 0 = 0$

وبالتالي فإن جدول الحل الأساسي الجديد هو:

C		30	36	0	0	0		
		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	b	Ratio
36	X_2	2/3	1	1/9	0	0	500	750
O	S_2	5	0	-2/3	1	0	1500	300
O	S_3	①	0	-1/3	0	1	300	300
Z		24	36	4	0	0	18000	
C-Z		6	0	-4	0	0	–	

وعند النظر إلى صف (C-Z) نجد قيمة موجبة تحت عمود المتغير غير الأساسي X_1 وهذا يعني عدم التوصل إلى الحل الأمثل الذي يشترط أن تكون

كافة القيم صفرية أو سالبة. ووجود قيمة موجبة يعني إمكانية زيادة الهدف (الأرباح) عن طريق تحسين الحل ثانية.

تحسين الحل:

- المتغير الداخل هو X_1 لأن له أكبر قيمة موجبة في صف (C-Z).
- المتغير الخارج هو S_2 أو S_3 لأن لهما أصغر ناتج متساوي من حاصل قسمة المتغيرات الأساسية على القيم المناظرة لها في العمود المحوري.

واختيار أيّ منهما لا يؤثر على النتيجة، فلو اعتبرنا المتغير الأساسي الخارج هو S_3، فإن العنصر المحوري سيكون العدد (1) كما هو ظاهر في الجدول السابق وبالتالي فإن المعادلة المحورية هي:-

C		30	36	0	0	0	
		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	b
36	X_2						
O	S_2						
30	X_1	1	0	-1/3	0	1	300

وبعد تحديد العنصر المحوري والمعادلة المحورية يجب استخراج قيم X_2 و S_2 الجديدة وكذلك قيم Z وقيم C-Z الجديدة كما يلي:

قيم X_2 الجديدة = القديمة –[معامل المتغير الداخل X_1 المقابل القيد X_2] [المعادلة المحورية]

$$= [\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{9}, 0, 0, 500] - [\frac{2}{3}]\,[1, 0, \frac{-1}{3}, 0, 1, 300]$$

$$= [\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{9}, 0, 0, 500] - [\frac{2}{3}, 0, \frac{-2}{9}, 0, \frac{2}{3}, 200]$$

$$= [0, 1, \frac{1}{3}, 0, \frac{-2}{3}, 300]$$

قيم S_2 الجديدة = القديمة -[معامل المتغير الداخل X_1 المقابل القيد S_2][المعادلة المحورية]

$$= [1500، 0، 1، \frac{-2}{3}، 0، 5] - [5]\ [300، 1، 0، \frac{-1}{3}، 0، 1]$$

$$= [1500، 0، 1، \frac{-2}{3}، 0، 5] - [1500، 5، 0، \frac{-5}{3}، 0، 5]$$

$$= [0، -5، 1، 1، 0، 0]$$

وبعد تفريغ القيم الجديدة لـ X_2 و S_2 في جدول الحل الأساسي يظهر لنا كما يلي:

C		30	36	0	0	0	
		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	b
36	X_2	0	1	1/3	0	-2/3	300
O	S_2	0	0	1	1	-5	0
30	X_1	1	0	-1/3	0	1	300

بعد ذلك نستخرج القيم الجديدة لكل من (Z) و (C-Z) ليظهر لنا جدول الحل النهائي التالي:

C		30	36	0	0	0	
		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	b
36	X_2	0	1	1/3	0	-2/3	300
O	S_2	0	0	1	1	-5	0
30	X_1	1	0	-1/3	0	1	300
Z		30	36	2	0	6	19800
C-Z		0	0	-2	0	-6	

وحيث أن كافة المعاملات في صف (C-Z) صفرية أو سالبة فقد تحقق الحل الأمثل والمتمثل في إنتاج 300 وحدة من X_1 و 300 وحدة من X_2 واستخدام كامل ما هو متوفر من S_2.

ب- الوصول إلى الحل الأمثل (تصغير) في ظل شرط المحدودية أصغر أو يساوي ≤.

<u>الخطوة الأولى:</u>

1- تحويل دالة الهدف من تصغير إلى تعظيم.

2- التأكد من أن قيم المتغيرات في الجانب الأيمن من القيود أكبر من صفر أي ليست سالبة.

3- تحويل المتباينات إلى الشكل القياسي.

<u>الخطوة الثانية:</u>

إيجاد حل أساسي أولي ممكن وذلك بتفريغ قيم المتغيرات الواردة في الشكل القياسي للمتباينات (الهدف والقيود) في الجدول البسيط.

<u>الخطوة الثالثة:</u> "التحقق من الأمثلية".

وسنوضح خطوات الوصول إلى الحل الأمثل (تصغير) في ظل شرط المحدودية أصغر أو يساوي (≤) من خلال المثالي التالي:

مثال (1):

ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية التالية:

$$\text{Min. } Z = X_2 - 3X_3 + 2X_5$$

S.T

$$3X_2 - X_3 + 3X_5 \leq 7$$

$$-2X_2 + 4X_3 \leq 12$$

$-4X_2 + 3X_3 + 8X_5 \leq 10$

$X_2, X_3, X_5 \geq 0$

المطلوب: إيجاد الحل الأمثل باستخدام الطريقة المبسطة.

الحل:

الخطوة الأولى:

1- تحويل دالة الهدف من تصغير إلى تعظيم كما يلي:

$$Max.\ Z' = (-Z) = -X_2 + 3X_3 - 2X_5$$

2- التأكد من أن قيم المتغيرات في الجانب الأيمن من القيود أكبر من صفر أي ليست سالبة وهي كذلك. أي أن شرط عدم السالبية قد تحقق.

3- تحويل المتباينات إلى الشكل القياسي كما يلي:

$$Max.\ Z' = -X_2 + 3X_3 - 2X_5 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

$$3X_2 - X_3 + 2X_5 + S_1 + 0S_2 + 0S_3 = 7$$

$$-2X_2 + 4X_3 + 0X_5 + 0S_1 + S_2 + 0S_3 = 13$$

$$-4X_2 + 3X_3 + 8X_5 + 0S_1 + 0S_2 + S_3 = 10$$

الخطوة الثانية "إيجاد حل أساسي أولي ممكن".

ويتم ذلك بتفريغ بيانات النموذج القياسي للمشكلة في الجدول البسيط لاستخراج قيم (Z) وقيم (C-Z) كما يظهر في الجدول التالي:

C		-1	3	-2	0	0	0		
		X_2	X_3	X_5	S_1	S_2	S_3	b	Ratio
0	S_1	3	-1	2	1	0	0	7	-7
0	S_2	-2	(4)	0	0	1	0	12	3 ← خارج
0	S_3	-4	3	8	0	0	1	10	10/3
Z		0	0	0	0	0	0	0	
C-Z		-1	3 ↑ داخل	-2	0	0	0		

وحيث أن الهدف هو التعظيم بعد تحويل دالة الهدف من تصغير إلى تعظيم، فإن شرط الوصول إلى الحل الأمثل هو أن تكون كافة القيم في صف C-Z صفرية أو سالبة، إلاّ أننا نلاحظ وجود قيم موجبة تحت عمود المتغير غير الأساسي X_3 وهذا يعني أننا لم نتوصل إلى الحل الأمثل، ووجود هذا المتغير الموجب يعني إمكانية تحسين الحل. ولتحسين الحل علينا تحديد المتغير الداخل والخارج لتحديد العنصر المحوري وبالتالي المعادلة المحورية.

← X_3 هو المتغير الداخل.

← S_2 هو المتغير الخارج.

← العدد (4) هو العنصر المحوري.

← المعادلة المحورية هي:

$$\left[\frac{-2}{4}, \frac{4}{4}, \frac{0}{4}, \frac{0}{4}, \frac{1}{4}, \frac{0}{4}, \frac{12}{4}\right]$$

C		-1	3	-2	0	0	0	
		X_2	X_3	X_5	S_1	S_2	S_3	b
0	S_1	?	?	?	?	?	?	?
3	X_3	$\frac{-1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{4}$	0	3
0	S_3	?	?	?	?	?	?	?
Z		?	?	?	?	?	?	?
C-Z		?	?	?	?	?	?	?

أما قيم S_1 و S_3 الجديدة فهي:

S_1الجديدة = S_1 القديمة – (معامل المتغير الداخل المقابل للقيد S_1) (المعادلة المحورية)

$$= [3 ،-1 ، 2،، 1 ،0، 0 ،7] - [-1] [\frac{-1}{2} ،1 ،0، 0، \frac{1}{4} ،0 ،3]$$

$$= [3 ،-1 ،2 ،1 ،0 ،0 ،7] - [\frac{1}{2} ،-1 ،0 ،0 ، \frac{-1}{4} ،0 ،-3]$$

$$= [2.5 ،0 ،2 ،1 ، \frac{1}{4} ،0 ،10]$$

S_3الجديدة = S_3 القديمة – (معامل المتغير الداخل المقابل للقيد S_3) (المعادلة المحورية)

$$= [-4 ،3 ،8 ،0 ،0 ،1 ،10] - [3] [\frac{-1}{2} ،1 ، 0 ،0 ، \frac{1}{4} ،0 ،3]$$

$$= [-4 ،3 ،8 ،0 ،0 ،1 ،10] - [\frac{-3}{2} ،3 ،0 ،0، \frac{3}{4}، 0، 9]$$

$$= [\frac{-5}{2} ، 0 ،8 ،0 ، \frac{-3}{4}، 1 ،1]$$

وبعد تفريغ قيم S_1 و S_3 الجديدة في الجدول السابق نستخرج قيم Z الجديدة وقيم C-Z للتحقق من أمثلية الحل.

C		-1	3	-2	0	0	0		
		X_2	X_3	X_5	S_1	S_2	S_3	b	Ratio
0	S_1	(2.5)	0	2	1	$\frac{1}{4}$	0	10	4
3	X_3	$\frac{-1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{4}$	0	3	-6 تهمل
0	S_3	-2.5	0	8	0	$\frac{-3}{4}$	1	1	$\frac{-2}{5}$ تهمل
Z		$\frac{-3}{2}$	3	0	0	$\frac{3}{4}$	0	9	
C-Z		$\frac{1}{2}$	0	-2	0	$\frac{-3}{4}$	0		

بعد استخراج قيم C-Z نلاحظ بأنها ليست جميعها صفرية أو سالبة أي أننا لم نصل بعد إلى الحل الأمثل، ووجود قيمة موجبة ($\frac{1}{2}$) تحت عمود المتغير X_2 في صف (C-Z) يعني أن فرصة تحسين الحل لا تزال قائمة.

← X_2 هو المتغير الداخل.

← S_1 هو المتغير الخارج.

← العدد (2.5) هو العنصر المحوري.

← المعادلة المحورية هي:

$$[1 ،0 ، \frac{4}{5} ، \frac{2}{5} ، \frac{1}{10} ،0 ،4]$$

← قيم X_3 الجديدة هي :

$$[0 ،1 ، \frac{2}{5} ، \frac{1}{5} ، \frac{3}{10} ،0 ،5]$$

← قيم S_3 الجديدة هي :

$$[\ 0 \ ، 0 \ ، 10 \ ، 1 \ ، \frac{-1}{2} \ ، 1 \ ، 11\ ]$$

وبعد تفريغ قيم معادلة المحور وقيم X_3 الجديدة و S_3 الجديدة في جدول حل أساسي جديد نستخرج قيم (Z) الجديدة وقيم (C-Z) الجديدة لنتحقق من أمثلية الحل كما يلي:

C		−1	3	−2	0	0	0	
		X_2	X_3	X_5	S_1	S_2	S_3	b
-1	X_2	1	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	0	4
3	X_3	0	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	0	5
0	S_3	0	0	10	1	$\frac{-1}{2}$	1	11
Z		−1	3	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	0	11
C-Z		0	0	$\frac{-12}{5}$	$\frac{-1}{5}$	$\frac{-1}{2}$	0	

بعد استخراج قيم Z الجديدة وقيم (C-Z) نجد أن كافة القيم في صف C-Z صفرية وسالبة وليس هناك أي قيمة موجبة وهذا يعني أننا توصلنا إلى الحل الأمثل حيث:

$X_2 = 4$

$X_3 = 5$

$X_5 = 0$

$$\Rightarrow Max.Z' = (-Z) = -X_2 + 3X_3 - 2X_5$$

$$= -4 + (3)(5) - (2)(0)$$

$$= 11 \text{ or } Z_{min.} = -11$$

جـ- الوصول إلى الحل الأمثل (تعظيم) في ظل شرط المحدودية أكبر او يساوي (≥).

الخطوة الأولى: إيجاد النموذج القياسي للمشكلة:

وهو يعني كما ذكرنا سابقاً تحويل المتباينات الرياضية المعبرة عن المشكلة التي تحتوي على علامة ≥ أو ≤ إلى الحالة المستقرة (الشكل القياسي) وهي الحالية المكتوبة بعلاقة (=).

1- النموذج القياسي للقيو دفي ظل (≥)

إن القيد من نوع أكبر أو يساوي (≥) يعني أن الجهة اليسرى للمتباينة أكبر من الجهة اليمنى. وبالتالي فإن تحقيق المساواة ممكن عن طريق إدخال متغير بإشارة سالبة إلى الجهة اليسرى من المتباينة يساوي الفرق بين الجهتين يرمز له بالرمز (S-) ويسمى بالمتغير الإضافي (الفائض) لأنه يمثل الزيادة على المستوى المطلوب.

مثال: حول متباينة القيد التالي إلى الشكل القياسي

$$3X_1 + 4X_2 \geq 12$$

الحل:

حيث أن علاقة المتباينة من نوع (≥) فهذا يعني أن الجانب الأيسر أكبر من الجانب الأيمن، ولتحقيق المساواة يتم إضافة متغير إضافي بإشارة سالبة إلى الجهة اليسرى كما يلي:

$$3X_1 + 4X_2 - S = 12$$

وحيث أن الحل الأساسي الأولي يتطلب أن تكون قيم X_1, X_2 مساوية للصفر في بداية الحل، فإن هذا يعني:

$$3(0) + 4(0) - S = 12$$

$$-S = 20$$

$$S = -30$$

أي أن قيمة المتغير الإضافي سالبة وهذا سينافي شرط عدم السلبية للمتغيرات وبالتالي تعذر الحصول على حل أولي ممكن، ومن أجل علاج ذلك يتم إضافة متغير آخر يسمى بالمتغير الاصطناعي (R) لتحقيق شرط عدم السلبية للمتغيرات، أي أن الشكل القياسي لهذا القيد هو كما يلي:

$$3X_1 + 4X_2 - S + R = 12$$

فعند بداية الحل حيث قيم X_1, X_2, S مساوية للصفر فإن قيمة المتغير الاصطناعي R ستكون موجبة مساوية (12) وبالتالي فإن شرط اللاسلبية قد تحقق.

2- النموذج القياسي للقيد من نوع (=)

يعالج القيد من نوع (=) ليأخذ الشكل القياسي بإضافة متغير اصطناعي يرمز له بالرمز (R) فقط ويحقق في نفس الوقت شرط اللاسلبية.

مثال: حول القيد التالي إلى الشكل القياسي:

$$3X_1 + 4X_2 = 12$$

الحل:

$$3X_1 + 4X_2 + R = 12$$

وحيث أن الحل الأساسي الأولي يتطلب أن تكون قيم X_1, X_2 مساوية للصفر في بداية الحل، فإن هذا يعني أن :

$$R = 12$$

وبالتالي فإن شرط اللاسلبية قد تحقق.

3- النموذج القياسي للجانب الأيمن من القيود:

إن الجانب الأيمن للقيود (الثوابت) يجب أن تكون موجبة، فإذا كانت سالبة يجب تحويلها إلى موجبة ويتم ذلك حسب الاحتمالات التالية:

أ- إذا كان اتجاه المتباينة من نوع أقل أو يساوي ≤.

يضرب طرفي المعادلة بـ (-1) ثم تقلب إشارة المتراجحة من (≤) أي (≥) ثم يتم تحويلها إلى الشكل القياسي.

مثال: حول المتباينة التالية إلى الشكل القياسي

$$X_1 + 2X_2 \leq -4$$

الحل:

$$-1\,(X_1 + 2X_2 \leq -4)$$

$$-X_1 - 2X_2 \geq 4$$

والشكل القياسي لها هو:

$$-X_1 - 2X_2 - S + R = 4$$

ب- إذا كان اتجاه المتباينة من نوع أكبر أو يساوي ≥.

يضرب طرفي المعادلة بـ (-1) ثم تقلب إشارة المتراجمة من (≥) إلى (≤) ثم تحول إلى الشكل القياسي.

مثال: حول المتباينة التالية إلى الشكل القياسي

$$5X_1 - 2X_2 \geq -7$$

الحل:

$$-1\,[\,5X_1 - 2X_2 \geq -7\,]$$

$-5X_1 + 2X_2 \leq 7$

والشكل القياسي لها هو:

$-5X_1 + 2X_2 + S = 7$

جـ- إذا كان القيد عبارة عن معادلة رياضية طرفها الأيمن سالب، يتم ضربها بـ (1-) ثم تحول إلى الشكل القياسي:

مثال: حول المتباينة التالية إلى الشكل القياسي

$-X_1 + 3X_2 = -8$

الحل:

$-1\,(-X_1 + 3X_2 = -8)$

$X_1 - 3X_2 = 8$

والشكل القياسي لها هو:

$X_1 - 3X_2 + R = 8$

> **ملاحظة**
>
> إن أي قيد لا يحتوي على متغير راكد (S+ ، S-) يجب أن يضاف إليه متغير اصطناعي (R) للحصول على مصفوفة الوحدة لنتمكن من الحصول على حل أولي ممكن يحقق شرط اللاسلبية.

4- الشكل القياسي لدالة الهدف في ظل القيود (≥ ، =)

بعد تحويل القيود إلى الشكل القياسي في ظل القيود (≥، =) من خلال إضافة متغيرات اصطناعية (R)، والتأكد من أن قيم الجانب الأيمن للقيود (الثوابت) موجبة، يجب تحويل دالة الهدف إلى الشكل القياسي أيضاً مع

ملاحظة أن هنالك أسلوبين يتم بموجبهما حل نموذج البرمجة الخطية الذي يحتوي على متغيرات اصطناعية هما:

1- أسلوب M- الكبيرة The Big M-method

2- أسلوب المرحلتين The Two - phase Method

أسلوب M – الكبيرة The Big M-method:

يقوم هذا الأسلوب على أساس إضافة معامل كبير جداً لكل متغير اصطناعي في دالة الهدف، ويرمز لهذا المعامل بالرمز (M)، وهو:

1- يحمل إشارة سالبة في حالة التعظيم.

2- يحمل إشارة موجبة في حالة التقليل.

مع ملاحظة أن شرط الأمثلية في حالة التعظيم هو أن تكون جميع القيم في صف (C-Z) إما صفرية أو سالبة أما في حالة التقليل فجميع القيم في صف (C-Z) يجب أن تكون صفرية أو موجبة.

مثال1: أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية مستخدماً طريقة M- الكبيرة.

$\text{Max. } Z = 3X_1 - X_2$

S.T

$2X_1 + X_2 \leq 2$

$X_1 + 3X_2 \geq 3$

$X_2 \leq 4$

$X_1, X_2 \geq 0$

الحل:

الخطوة الأولى: وضع دالة الهدف والقيود في الشكل القياسي:

$$2X_1 + X_2 + S_1 = 2$$

$$X_1 + 3X_2 - S_2 + R_1 = 3$$

$$0X_1 + X_2 + S_3 = 4$$

وللوصول إلى مصفوفة الوحدة، فإن طريقة السمبلكس تتطلب في حال ظهور متغير في أحد المعادلات أن يظهر في كافة المعادلات، والمتغيرات التي ظهرت في المعادلات أعلاه هي $(X_1, X_2, S_1, S_2, S_3, R_1)$

$$2X_1 + X_2 + S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0R_1 = 2$$

$$X_1 + 3X_2 + 0S_1 - S_2 + 0S_3 + R_1 = 3$$

$$0X_1 + X_2 + 0S_1 + 0S_2 + S_3 + 0R_1 = 4$$

وبالتالي فإن الشكل القياسي لدال الهدف هو:

$$Max.\ Z = 3X_1 - X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 - MR_1$$

وكما نلاحظ فإنه تم إضافة معامل كبير (M) وإشارة سالبة إلى دالة الهدف لأن هدف هذه المشكلة هو التعظيم.

الخطوة الثانية: إيجاد حل أساسي أولي ممكن

بعد تحويل المتباينات (الهدف والقيود) إلى الشكل القياسي، يتم تفريغ البيانات في جدول الحل الأولي كما يلي:

C		3	-1	0	0	0	-M		
		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R_1	b	Ratio
0	S_1	2	1	1	0	0	0	2	2
-M	R_1	1	(3)	0	-1	0	1	3	1
0	S_3	0	1	0	0	1	0	4	4
Z		-M	-3M	0	M	0	-M	-3M	
C-Z		3 + M	-1+3M	0	-M	0	0		

نلاحظ بعد استخراج قيم C-Z وجود قيم موجبة هي (M, 3M) وهذا يعني أن الحل الأولي ليس أمثلاً وأنه يمكن تحسين الحل.

الخطوة الثالثة: تحسين الحل

لتحسين الحل علينا تحديد المتغير الداخل والخارج، وكما نلاحظ من الجدول السابق، فإن المتغير الداخل هو (X_2) والخارج هو (R_1) وبالتالي فإن العنصر المحوري هو (3) والمعادلة المحورية هي:

S_1	?	?	?	?	?	?
X_2	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{-1}{3}$	0	1
S_3	?	?	?	?	?	?

ثم علينا استخراج قيم S1 الجديدة و S_3 الجديدة.

S_1الجديدة = S_1 القديمة - (معامل المتغير الداخل المقابل للقيد S_1) (المعادلة المحورية)

$$= (2 ،1 ،1 ،0 ،0 ،2) - (1)\ (\frac{1}{3} ،1 ،0 ،\frac{-1}{3} ،0 ،1)$$

$$= (\frac{5}{3} ،0 ،1، \frac{1}{3} ،0 ،1)$$

S_3الجديدة = S_3 القديمة - (معامل المتغير الداخل المقابل للقيد S_2) (المعادلة المحورية)

$$\left(\frac{1}{3} ،1 ،0 ،\frac{-1}{3} ،0 ،1\right) (1) - (0 ،1 ،0 ،0 ،1 ،4) =$$

$$\left(\frac{-1}{3} ،0 ،0، \frac{1}{3} ،1 ،3\right) =$$

وبعد تفريغ قيم المعادلة المحورية وقيم S_1 و S_3 الجديدة في جدول حل جديد نستخرج قيم Z الجديدة وقيم C-Z الجديدة ليظهر لنا كما يلي:

C		3	−1	0	0	0		
		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	b	Ratio
0	S_1	($\frac{5}{3}$)	0	1	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{3}{5}$
-1	X_2	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{-1}{3}$	0	1	3
0	S_3	$\frac{-1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	1	3	−9 يهمل
Z		$\frac{-1}{3}$	−1	0	$\frac{1}{3}$	0	−1	
C-Z		$\frac{10}{3}$	0	0	$\frac{-1}{3}$	0		

وعند النظر إلى قيم صف C-Z نجد أن شرط الأمثلية في حالة التعظيم لم يتحقق بعد لوجود قيمة موجبة، علماً بأن القيمة الموجبة تعني أن فرصة زيادة الهدف ممكنة من خلال تحسين الحل.

كما نلاحظ من الجدول أعلاه، فإن العنصر الداخل هو X_1 والخارج هو S_1 والعنصر المحوري هو $\frac{5}{3}$ وبالتالي فإن المعادلة المحورية هي:

X_1	1	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
X_2	?	?	?	?	?	?
S_3	?	?	?	?	?	?

وقيم S_3, X_2 الجديدة هي:

$$[1 ،0 ،\frac{3}{5} ،\frac{1}{5} ،0 ،\frac{3}{5}] [\frac{1}{3}] - [\frac{1}{3} ،1 ،0، \frac{-1}{3} ،0 ،1] = \text{الجديدة } X_2$$

$$[0 ،1 ،\frac{-1}{5} ،\frac{-2}{5} ،0 ،\frac{4}{5}] =$$

$$[1 ،0 ،\frac{3}{5} ،\frac{1}{5} ،0 ،\frac{3}{5}] [\frac{-1}{3}] - [\frac{-1}{3} ،0 ،0، \frac{1}{3} ،1 ،3] = \text{الجديدة } S_3$$

$$[0 ،0 ،\frac{1}{5} ،\frac{2}{5} ،1، \frac{16}{5}] =$$

وبعد تفريغ قيم المعادلة المحورية وقيم X_2 الجديدة و S_3 الجديدة في جدول حل جديد نستخرج قيم Z الجديدة وقيم C-Z الجديدة ليظهر لنا كما يلي:

C		3	−1	0	0	0	
		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	b
3	X_1	1	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
-1	X_2	0	1	$\frac{-1}{5}$	$\frac{-2}{5}$	0	$\frac{4}{5}$
0	S_3	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{16}{5}$
Z		3	−1	2	1	0	1
C-Z		0	0	−2	−1	0	

وعند استعراض كافة قيم صف (C-Z) نجد بأنها صفرية أو سالبة وهذا يعني إننا توصلنا إلى الحل الأمثل حيث:

$$Z = 1 \quad , X_2 = \frac{4}{5} \quad , \quad X_1 = \frac{3}{5}$$

وللتأكد من صحة الحل، نعوض قيم X_2, X_1 في دالة الهدف كما يلي:

$$\text{Max. } Z = 3X_1 - X_2$$

$$= 3\left(\frac{3}{5}\right) - \frac{4}{5}$$

$$= \frac{9}{5} - \frac{4}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

$$\text{Max. } Z = 1$$

مثال2: أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية مستخدماً طريقة M– الكبيرة.

$$\text{Max. } Z = 3X_1 + 5X_2$$

S.T

$$X_1 + 3X_2 = 9$$

$$2X_1 + X_2 \geq 12$$

$$X_1 - 3X_2 \leq 3$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل:

الخطوة الأولي: تحويل المتباينات إلى الشكل القياسي:

$$X_1 + 3X_2 + R_1 = 9$$

$$2X_1 + X_2 - S_1 + R_2 = 12$$

$$X_1 - 3X_2 + S_2 = 3$$

$$X_1 + 3X_2 + 0S_1 + 0S_2 + R_1 + 0R_2 = 9$$

$$2X_1 + X_2 - S_1 + 0S_2 + 0R_1 + R_2 = 12$$

$$X_1 + 3X_2 + 0S_1 + S_2 + 0R_1 + 0R_2 = 3$$

$$Z = 3X_1 + 5X_2 + 0S_1 + 0S_2 - MR_1 - MR_2$$

الخطوة الثانية: إيجاد حل أساسي أولي ممكن

C		3	5	0	0	-M	-M		
		X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	b	Ratio
-M	R_1	1	(3)	0	0	1	0	9	3
-M	R_2	2	1	-1	0	0	1	12	12
0	S_2	1	-3	0	1	0	0	3	-1 يهمل
Z		-3M	-4M	M	0	-M	-M	-21M	
C-Z		3 + 3M	5+4M	-M	0	0	0		

نلاحظ في صف C-Z وجود قيم موجبة، وهذا يعني أن الحل الأولي ليس أمثلاً الأمر الذي يتطلب تحسين الحل.

الخطوة الثالثة: تحسين الحل:

X_2: المتغير الداخل.

R_1: المتغير الخارج.

العدد 3: العنصر المحوري.

⇐ المعادلة المحورية هي:

	X_1	X_2	S_1	S_2	R_2	b
X_2	$\frac{1}{3}$	1	0	0	0	3
R_2	?	?	?	?	?	?
S_2	?	?	?	?	?	?

أما قيم R_2 الجديدة و S_2 الجديدة فهي:

R_2 الجديدة = R_2 القديمة − (معامل المتغير الداخل المقابل للقيد R_2) (المعادلة المحورية)

$$= (2, 1, -1, 0, 1, 12) - (1)\left(\frac{1}{3}, 1, 0, 0, 0, 3\right)$$

$$= \left(\frac{5}{3}, 0, -1, 0, 1, 9\right)$$

S_2 الجديدة = S_2 القديمة − (معامل المتغير الداخل المقابل للقيد S_2) (المعادلة المحورية)

$$= (1, -3, 0, 1, 0, 3) - (-3)\left(\frac{1}{3}, 1, 0, 0, 0, 3\right)$$

$$= (1, -3, 0, 1, 0, 3) - (-1, -3, 0, 0, 0, -9)$$

$$= (2, 0, 0, 1, 0, 12)$$

وعند تفريغ قيم معادلة المحور وقيم R_2 و S_2 الجديدة في جدول حل جديد نستخرج قيم Z وقيم C-Z ليظهر لنا كما يلي:

C		3	5	0	0	-M		
		X_1	X_2	S_1	S_2	R_2	b	Ratio
5	X_2	$\frac{1}{3}$	1	0	0	0	3	9
-M	R_2	$\frac{5}{3}$	0	-1	0	1	9	5.4
0	S_2	2	0	0	1	0	12	0
Z		$\frac{5}{3}-\frac{5}{3}m$	5	M	0	-M	15-9M	
C-Z		$\frac{4}{3}+\frac{5}{3}m$	0	-M	0	0		

وحيث لا تزال هناك قيمة موجبة في صف C-Z، فإن إمكانية تحسين الحل لا تزال قائمة حيث:-

X_1: المتغير الداخل.

R_2: المتغير الخارج.

$\frac{5}{3}$: العنصر المحوري.

⇐ المعادلة المحورية هي:

	X_1	X_2	S_1	S_2	b
X_2	?	?	?	?	?
X_1	1	0	$\frac{-3}{5}$	0	$\frac{27}{5}$
S_2	?	?	?	?	?

أما قيم X_2, S_2 الجديدة فهي:

X_2 الجديدة = X_2 القديمة − (معامل المتغير الداخل المقابل للقيد X_2) (المعادلة المحورية)

$$= \left(\frac{1}{3}, 1, 0, 0, 3\right) - \left(\frac{1}{3}\right)\left(1, 0, \frac{-3}{5}, 0, 5.4\right)$$

$$= \left(\frac{1}{3}, 1, 0, 0, 3\right) - \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{-3}{15}, 0, \frac{27}{15}\right)$$

$$= \left(0, 1, \frac{1}{5}, 0, \frac{6}{5}\right)$$

S_2 الجديدة = S_2 القديمة − (معامل المتغير الداخل المقابل للقيد S_2) (المعادلة المحورية)

$$= (2, 0, 0, 1, 12) - (2)\left(1, 0, \frac{-3}{5}, 0, 5.4\right)$$

$$= (2, 0, 0, 1, 12) - \left(2, 0, \frac{-6}{5}, 0, 10.8\right)$$

$$= \left(0, 0, \frac{6}{5}, 1, \frac{6}{5}\right)$$

وبعد تفريغ قيم معادلة المحور وقيم X_2 الجديدة وS_2 الجديدة نستخرج قيم Z وقيم C-Z لنتحقق من الأمثلية كما يلي:

C		3	5	0	0		
		X_1	X_2	S_1	S_2	b	Ratio
5	X_2	0	1	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{6}{5}$	6
3	X_1	1	0	$\frac{-3}{5}$	0	$\frac{27}{5}$	تهمل
0	S_2	0	0	$\frac{6}{5}$	1	$\frac{6}{5}$	1
Z		3	5	$\frac{-4}{5}$	0	22.2	
C-Z		0	0	$\frac{4}{5}$	0		

وحيث لا تزال توجد قيمة موجبة في صف C-Z فإن الأمثلية لم تتحقق بعد وبالتال لا يزال تطوير الحل ممكناً:

حيث:

S_1:المتغير الداخل.

S_2: المتغير الخارج.

$\frac{6}{5}$: العنصر المحوري.

⇐ المعادلة المحورية هي:

X_2	?	?	?	?	?
X_1	?	?	?	?	?
S_1	0	0	1	$\frac{5}{6}$	1

وقيم X_2 الجديدة هي:

$$(0 ، 0 ، 1 ، \frac{5}{6} ، 1)\ (\frac{1}{5}) - (0 ، 1 ، \frac{1}{5} ، 0 ، \frac{6}{5})$$

$$(0 ، 1 ، 0 ، \frac{1}{6} ، 1) =$$

وقيم X_1 الجديدة هي:

$$(0 ، 0 ، 1 ، \frac{5}{6} ، 1)\ (\frac{-3}{5}) - (1 ، 0 ، \frac{-3}{5} ، 0 ، \frac{27}{5})$$

$$(1 ، 0 ، 0 ، \frac{1}{2} ، 6) =$$

وبعد تفريغ قيم المعادلة المحورية وقيم X_2 الجديدة و X_1 الجديدة نستخرج قيم Z وقيم C-Z ونتحقق من الأمثلية:

C		3	5	0	0	
		X_1	X_2	S_1	S_2	b
5	X_2	0	1	0	$\frac{-1}{6}$	1
3	X_1	1	0	0	$\frac{1}{2}$	6
0	S_1	0	0	$\frac{5}{6}$	1	
Z		3	5	0	$\frac{2}{5}$	23
C-Z		0	0	0	$\frac{-2}{3}$	

وحيث أن كافة القيم في صف C-Z إما صفرية أو سالبة فهذا يعني إننا توصلنا إلى الحل الأمثل حيث:

$X_1 = 6$

$X_2 = 1$

$Z = 23$

نلاحظ بأن الحل الأمثل قد تحقق بعد التخلص من المتغيرات الاصطناعية R_2, R_1 في عمود المتغيرات الأساسية في جدول الحل الأولي الممكن في الخطوة الثانية.

د- الوصول إلى الحل الأمثل (تصغير) في ظل شرط المحدودية أكبر أو يساوي (≥).

إن خطوات الوصل إلى الحل الأمثل (تصغير) في ظل شرط المحدودية أكبر أو يساوي لا يختلف عن خطوات الوصول إلى الحل الأمثل (تعظيم) في ظل شرط أكبر أو يساوي أو في ظل شرط أقل أو يساوي والمثال التالي يوضح هذه الخطوات:

مثال: أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية مستخدماً طريقة السمبلكس.

$$Min.\ Z. = 2X_1 + 3X_2$$

S.T

$$X_1 \geq 125$$

$$X_1 + X_2 \geq 350$$

$$2X_1 + X_2 \leq 600$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

الحل:

الخطوة الأولى: تحويل المتباينات إلى الشكل القياسي:

$$X_1 - S_1 + R_1 = 125$$

$$X_1 + X_2 - S_2 + R_2 = 350$$

$$2X_1 + X_2 + S_3 = 600$$

إن المتغيرات التي ظهرت في المعادلات أعلاه هي ($X_1, X_2, S_1, S_2, S_3, R_1, R_2$) وللوصول إلى مصفوفة الوحدة، فإن هذه المتغيرات جميعها يجب أن تظهر في كافة المعادلات كما يلي:

$$X_1 + 0X_2 - S_1 + 0S_2 + 0S_3 + R_1 + 0R_2 = 125$$
$$X_1 + X_2 + 0S_1 - S_2 + 0S_3 + 0R_1 + R_2 = 350$$
$$2X_1 + X_2 + 0S_1 + 0S_2 + S_3 + 0R_1 + 0R_2 = 600$$

وبالتالي فإن الشكل القياسي لدالة الهدف هو:

$$Min.\ Z = 2X_1 + 3X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + MR_1 + MR_2$$

الخطوة الثانية: إيجاد حل أساسي أولي ممكن:

ويتم ذلك من خلال تفريغ المعادلات القياسية للقيود ودالة الهدف في جدول الحل الأولي لاستخراج قيم Z وقيم C-Z للتحقق من شرط الأمثلية كما يلي:

C		2	3	0	0	0	M	M	
		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R_1	R_2	b
M	R_1	(1)	0	−1	0	0	1	0	125
M	R_2	1	1	0	−1	0	0	1	350
0	S_3	2	1	0	0	1	0	0	600
Z		2M	M	-M	-M	0	M	M	475M
C-Z		2-2M	3-M	M	M	0	0	0	

عند النظر إلى قيم صف C-Z نجد قيم سالبة (-2M, -M) علماً بأن شرط الأمثلية في حالة التصغير هو أن تكون كافة قيم هذا الصف صفرية أو موجبة، وعليه فإن الحل الأولي هذا ليس أمثلا:

الخطوة الثالثة: تحسين الحل:

في حالة التصغير، المتغير الداخل هو المتغير الذي له أكبر قيمة سالبة وبالتالي فإن:

X_1 هو المتغير الداخل.

R_1 هو المتغير الخارج.

العنصر المحوري هو العدد (1)

⇐ المعادلة المحورية هي:

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R_2	b
X_1	1	0	-1	0	0	0	125
R_2	?	?	?	?	?	?	?
S_3	?	?	?	?	?	?	?

أما قيم R_2 الجديدة و S_3 الجديدة فهي:

R_2 الجديدة = R_2 القديمة − (معامل المتغير الداخل المقابل للقيد R_2) (المعادلة المحورية)

$$= (1, 1, 0, -1, 0, 1, 350) - (1)\,(1, 0, -1, 0, 0, 0, 125)$$

$$= (0, 1, 1, -1, 0, 1, 225)$$

S_3الجديدة = S_3 القديمة − (معامل المتغير الداخل المقابل للقيد S_3) (المعادلة المحورية)

$$= (2, 1, 0, 0, 1, 0, 600) - (2)\,(1, 0, -1, 0, 0, 0, 125)$$

$$= (0, 1, 2, 0, 1, 0, 350)$$

وبعد تفريغ قيم المعادلة المحورية وقيم R_2 الجديدة و S_3 الجديدة في جدول حل جديد نستخرج قيم Z وقيم C-Z كما يظهر في الجدول التالي:

C		2	3	0	0	0	M		
		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R_2	b	Ratio
2	X_1	1	0	-1	0	0	0	125	تهمل
M	R_2	0	1	1	-1	0	1	225	225
0	S_3	0	1	(2)	0	1	0	350	175
Z		2	M	-2+M	-M	0	M	250+ 225M	
C-Z		0	3-M	2-M	M	0	0		

عند النظر إلى صف C-Z نجد قيم سالبة (-M, -M)، أي أن شرط الأمثلية لم يتحقق بعد الأمر الذي يتطلب تحسين الحل كما يلي:

S_1 المتغير الداخل.

S_3 المتغير الخارج.

العدد (2) هو العنصر المحوري.

⇐ المعادلة المحورية هي:

X_1	?	?	?	?	?	?
R_2	?	?	?	?	?	?
S_1	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	175

قيم X_1 الجديدة هي:

$$(1, 0, -1, 0, 0, 125) - (1)\,(0, \tfrac{1}{2}, 1, 0, \tfrac{1}{2}, 175)$$

$$= (1, \tfrac{1}{2}, 0, 0, \tfrac{1}{2}, 300)$$

قيم R_2 الجديدة هي:

$$(0 ، \frac{1}{2} ، 1 ، 0 ، \frac{1}{2} ، 175)\ (1) - (0 ، 1 ، 1 ، -1 ، 0 ، 225)$$

$$(1 ، \frac{1}{2} ، 0 ، -1 ، -\frac{1}{2} ، 50) =$$

وبعد تفريغ قيم المعادلة المحورية وقيم X_1 الجديدة وقيم R_2 الجديدة في جدول حل جديد، تظهر لنا قيم Z وقيم C-Z كما في الجدول التالي:

C		2	3	0	0	0		
		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	b	Ratio
2	X_1	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	300	600
M	R_2	0	$\frac{1}{2}$	0	-1	$-\frac{1}{2}$	50	100
0	S_1	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	175	350
Z		2	$1+\frac{1}{2}M$	0	-M	$1-\frac{1}{2}M$	600 + 50 M	
C-Z		0	$2-\frac{1}{2}M$	0	M	$-1+\frac{1}{2}M$		

وحيث لا تزال هناك قيمة سالبة في صف C-Z فإن الحل ليس أمثلاً، ولتحسين الحل فإن:

X_2 هو المتغير الداخل.

R_2 المتغير الخارج.

والعنصر المحوري هو العدد $\frac{1}{2}$

⇐ المعادلة المحورية هي:

X_1	?	?	?	?	?	?
X_2	0	1	0	-2	-1	100
S_1	?	?	?	?	?	?

أما قيم X_1 الجديدة و S_1 الجديدة فهي:

X_1	1	0	0	1	1	250
S_1	0	0	1	1	1	125

وبعد تفريغ قيم المعادلة المحورية وقيم X_1 الجديدة و S_1 الجديدة في جدول حل جديد تظهر لنا قيم Z وقيم C-Z كما في الجدول التالي:

C		2	3	0	0	0	
		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	b
2	X_1	1	0	0	1	1	250
3	X_2	0	1	0	-2	-1	100
0	S_1	0	0	1	1	1	125
Z		2	3	0	-4	-1	800
C-Z		0	0	0	4	1	

وحيث أن كافة القيم في صف (C-Z) أما صفرية أو موجبة فهذا يعني أننا توصلنا إلى الحل الأمثل بحيث:

$X_1 = 250$

$X_2 = 100$
$Z = 800$

أسلوب المرحلتين The Two - Phase method:

وهو الأسلوب الثاني الذي يستخدم في حل نماذج البرمجة الخطية الذي يحتوي على متغيرات اصطناعية.

إن الحصول على الحل الأمثل باستخدام هذا الأسلوب يتم على مرحلتين هما:

المرحلة الأولى:

1- تكوين دالة هدف جديدة أو مصطنعة يرمز لها بالرمز (w) وهي عبارة عن مجموع المتغيرات الاصطناعية المضافة إلى القيود في شكلها القياسي.

2- إيجاد أصغر قيمة لهذه الدالة (Min. w) بغض النظر عن هدف المشكلة الأصلية.

3- إن قيود دالة الهدف الجديدة (w) هي نفس قيود دالة الهدف الأصلية.

4-وضع المتباينات (دالة الهدف الجديدة وقيود المشكلة) بالشكل القياسي.

5- تفريغ دالة الهدف الجديدة والقيود بعد تحويلهم إلى الشكل القياسي في جدول الحل الأولي.

6- استخراج قيمة (Z).

7- استخراج قيمة C-Z.

8- التحقق من الأمثلية لهذا الحل الأولي الذي يشترط أن تكون كافة القيم في صف C-Z صفرية أو موجبة مضاف إلى ذلك عدم ظهور متغيرات اصطناعية في عمود المتغيرات الأساسية. فإذا تحققت الأمثلية يتم الانتقال إلى المرحلة الثانية.

المرحلة الثانية:

1- في هذه المرحلة نأخذ جدول الحل الذي حقق شرط الأمثلية في المرحلة الأولى ونستبدل معاملات دالة الهدف المصطنعة (w) بمعاملات دالة الهدف الأصلية.

2- نستخرج قيم Z وقيم C-Z.

3- نتحقق من الأمثلية حيث:

أ- في حالة التعظيم، فإن كافة القيم في صف C-Z سالبة أو صفرية.

ب- في حالة التصغير، فإن كافة القيم في صف C-Z موجبة أو صفرية.

مثال:

أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية مستخدماً أسلوب المرحلتين:

$$Max.\ Z = 5X_1 - 4X_2 + 3X_3$$

S.T

$$2X_1 + X_2 - 6X_3 = 20$$
$$6X_1 + 5X_2 + 10X_3 \leq 76$$
$$8X_1 - 3X_2 + 6X_3 \leq 50$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

الحل:

المرحلة الأولى: إن الخطوة الأولى في هذه المرحلة هي تحويل قيود هذه المشكلة إلى الشكل القياسي لتحديد عدد المتغيرات الاصطناعية لتكوين دالة الهدف الاصطناعية (w).

$$2X_1 + X_2 - 6X_3 + R = 20$$
$$6X_1 + 5X_2 + 10X_3 + S_1 = 76$$
$$8X_1 - 3X_1 + 6X_3 + S_2 = 50$$

⇐ دالة الهدف الاصطناعية هي:

$$Min.\ w = R$$

لوجود متغير اصطناعي واحد في القيود.

وحيث أن المتغيرات التي ظهرت في القيود هي $(X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, R)$ فإن هذه المتغيرات جميعها يجب أن تظهر في كافة المعادلات للوصول إلى مصفوفة الوحدة كما يلي:

$$2X_1 + X_2 - 6X_3 + 0S_1 + 0S_2 + R = 20$$
$$6X_1 + 5X_2 - 10X_3 + S_1 + 0S_2 + 0R = 76$$
$$8X_1 - 3X_2 + 6X_3 + 0S_1 + S_2 + 0R = 50$$

وبالتالي فإن الشكل القياسي لدالة الهدف المصطنعة هو:

$$Min.\ w = 0X_1 + 0X_2 + 0X_3 + 0S_1 + 0S_2 + R$$

الخطوة الثانية: إيجاد حل أساسي أولي ممكن:

بعد تحويل المتباينات (الهدف والقيود) إلى الشكل القياسي يتم تفريغ البيانات في جدول حل أولي كما يلي:

C		0	0	0	0	0	1	
		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	R	b
1	R	2	1	−6	0	0	1	20
0	S_1	6	5	10	1	0	0	76
0	S_2	(8)	−3	6	0	1	0	50
Z		2	1	−6	0	0	1	20
C-Z		−2	−1	6	0	0	0	

عند النظر إلى قيم صف C-Z نجد قيم سالبة وهذا يعني أن الحل الأولي ليس أمثلاً، فشرط الأمثلية أن تكون كافة القيم صفرية أو موجبة لأن الهدف في الدالة المصطنعة هو التصغير. الأمر الذي يتطلب تحسين الحل.

الخطوة الثالثة: تحسين الحل:

X_1 هو المتغير الداخل لأن له أكبر قيمة سالبة.

S_2 هو المتغير الخارج لان له أصغر قيمة.

العنصر المحوري هو العدد (8).

⇐ المعادلة المحورية هي :

R	?	?	?	?	?	?	?
S_1	?	?	?	?	?	?	?
X_1	1	$\frac{-3}{8}$	$\frac{6}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{50}{8}$

أما قيم R الجديدة فهي:

Rالجديدة = R القديمة − (معامل المتغير الداخل المقابل للقيد R) (المعادلة المحورية)

$$= (2 ،1 ،-6 ،0 ،0 ،1 ،20) - (2)\ (1 ، \frac{-3}{8} ، \frac{6}{8} ،0 ، \frac{1}{8} ،0 ، \frac{50}{8})$$

$$= (0، \frac{7}{4} ، \frac{-15}{2} ،0 ، \frac{-1}{4} ،1 ، \frac{15}{2})$$

S_1الجديدة = S_1 القديمة − (معامل المتغير الداخل المقابل للقيد S_1) (المعادلة المحورية)

$$= (6 ،5 ،10 ،1 ،0 ،0 ،76) - (6)\ (1 ، \frac{-3}{8} ، \frac{6}{8} ،0 ، \frac{1}{8} ،0 ، \frac{50}{8})$$

$$= (0، \frac{29}{4} ، \frac{11}{2} ،1 ، \frac{-3}{4} ،0 ، \frac{77}{2})$$

وبعد تفريغ قيم المعادلة المحورية وقيم R الجديدة و S_1 الجديدة في جدول حل جديد تظهر لنا قيم Z وقيم C-Z كما في الجدول التالي:

C		0	0	0	0	0	1	
		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	R	b
1	R	0	$\frac{7}{4}$	$\frac{-15}{2}$	0	$\frac{+1}{4}$	1	$\frac{15}{2}$
0	S_1	0	$\frac{29}{4}$	$\frac{11}{2}$	1	$\frac{-3}{4}$	0	$\frac{77}{2}$
0	X_1	1	$\frac{-3}{8}$	$\frac{6}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{50}{8}$
Z		0	$\frac{7}{4}$	$\frac{-15}{2}$	0	$\frac{-1}{4}$	1	$\frac{15}{2}$
C-Z		0	$\frac{-7}{4}$	$\frac{15}{2}$	0	$\frac{+1}{4}$	0	

ولوجود قيمة سالبة في صف C-Z فإن هذا الحل ليس أمثلاً الأمر الذي يتطلب تحسين الحل ثانية. ولتحسين الحل فإن:

X_2 هو المتغير الداخل.

R هو المتغير الخارج.

- العنصر المحوري هو العدد $\frac{7}{4}$

⇐ المعادلة المحورية هي:

X_2	0	1	$\frac{-30}{7}$	0	$\frac{-1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{30}{7}$
S_1	?	?	?	?	?	?	?
X_1	?	?	?	?	?	?	?

أما قيم S_1 الجديدة و X_1 الجديدة فهي:

قيم S_1 الجديدة ($\frac{52}{7}$ ، $\frac{-29}{7}$ ، $\frac{2}{7}$ ، 1 ، $\frac{256}{7}$ ، 0 ، 0)

وقيم X_1 الجديدة ($\frac{55}{7}$ ، $\frac{3}{14}$ ، $\frac{1}{14}$ ، 0 ، $\frac{-6}{7}$ ، 0 ، 1)

وبعد تفريغ قيم معادلة المحور وقيم S_1 الجديدة وقيم X_1 الجديدة في جدول حل جديد تظهر لنا قيم Z وقيم C-Z كما في الجدول التالي:

C		0	0	0	0	0	1	
		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	R	b
0	X_2	0	1	$\frac{-30}{7}$	0	$\frac{-1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{30}{7}$
0	S_1	0	0	$\frac{256}{7}$	1	$\frac{2}{7}$	$\frac{-29}{7}$	$\frac{52}{7}$
0	X_1	1	0	$\frac{-6}{7}$	0	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{55}{7}$
Z		0	0	0	0	0	0	0
C-Z		0	0	0	0	0	0	

وحيث أن كافة القيم في صف (C-Z) صفرية أو موجبة ولم يعد في عمود المتغيرات الأساسية متغيرات اصطناعية فهذا يعني الوصول إلى الحل الأمثل لدالة الهدف المصطنعة (w) وانتهاء المرحلة الأولى للانتقال إلى المرحلة الثانية.

المرحلة الثانية:

نأخذ في هذه المرحلة جدول الحل أعلاه الذي حقق شرط الأمثلية ونستبدل

معاملات دالة الهدف المصطنعة (w) بمعاملات دالة الهدف الأصلية ثم نستخرج قيم Z وقيم C-Z ونتحقق من الأمثلية كما يلي:

C		5	-4	3	0	0	b
		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	
-4	X_2	0	1	$\frac{-30}{7}$	0	$\frac{-1}{7}$	$\frac{30}{7}$
0	S_1	0	0	$\frac{256}{7}$	1	$\frac{2}{7}$	$\frac{52}{7}$
5	X_1	1	0	$\frac{-6}{7}$	0	$\frac{1}{14}$	$\frac{55}{7}$
Z		5	−4	$\frac{90}{7}$	0	$\frac{13}{14}$	$\frac{155}{7}$
C-Z		0	0	$\frac{-69}{7}$	0	$\frac{-13}{14}$	

وحيث أن كافة القيم في صف C-Z صفرية أو سالبة فهذا يعني أننا توصلنا إلى الحل الأمثل حيث:

$$X_1 = \frac{55}{7}$$

$$X_2 = \frac{30}{7}$$

$$X_3 = 0$$

$$\text{Max. } Z = \frac{155}{7}$$

أسئلة الوحدة الثانية

السؤال الأول:

أوجد الحل الأمثل لنماذج البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة الرسم البياني:

أ-

$$\text{Max. } Z = 12X_1 + 9X_2$$

S.T

$$8X_1 + 4X_2 \le 240$$

$$15X_1 + 10X_2 \le 450$$

$$9X_1 + 6X_2 \le 360$$

$$X_1 + X_2 \ge 20$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

ب-

$$\text{Max. } Z = 3X_1 + 2X_2$$

S.T

$$X_1 \le 4$$

$$X_2 \le 6$$

$$3X_1 + 2X_2 \ge 18$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

جـ-

$$\text{Max. } Z = 7X_1 + 2X_2$$

S.T

$X_1 + X_2 = 100$

$X_2 \leq 55$

$2X_1 + X_2 \leq 180$

$X_1, X_2 \geq 0$

د-

$$\text{Min. } Z = 1.2X_1 + 1.9X_2$$

S.T

$X_1 + 3X_2 \geq 90$

$5X_1 + X_2 \geq 100$

$3X_1 + 2X_2 \geq 120$

$X_1 , X_2 \geq 0$

هـ-

$$\text{Min. } Z = 20X_1 + 10X_2$$

S.T

$X_1 + 2X_2 \leq 40$

$3X_1 + X_2 \geq 30$

$4X_1 + 3X_2 \geq 60$

$X_1 , X_2 \geq 0$

السؤال الثاني:

ليكن لدينا نماذج البرمجة الخطية التالية:

أ-

$$\text{Min. } Z = X_1 - 3X_2 + 3X_3$$

S.T

$3X_1 - X_2 + 2X_3 \leq 7$

$2X_1 + 4X_2 \geq -12$

$-4X_1 + 3X_2 + 8X_3 \leq 10$

$X_1 , X_2, X_3 \geq 0$

ب-

$$\text{Max. } Z = 5X_1 - 4X_2 + 3X_3$$

S.T

$2X_1 + X_2 - 6X_3 = 20$

$6X_1 + 5X_2 + 10X_3 \leq 76$

$8X_1 - 3X_2 + 6X_3 \leq 50$

$X_1 , X_2, X_3 \geq 0$

جـ-

$$\text{Max. } Z = 2X_1 + 1X_2 + 4X_3 + 2X_4 + 1X_5$$

S.T

$4X_1 + 1X_2 + 1.5X_3 + 4X_4 \leq 150$

$2X_1 + 3X_2 + 1X_3 + 2X_4 + 7X_5 \leq 180$

$2X_2 + 2X_3 + 2X_5 \le 120$

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \ge 0$

المطلوب:

إيجاد الحل الأمثل باستخدام الطريقة المبسطة.

السؤال الثالث:

أوجد الحل الأمثل لنماذج البرمجة الخطية التالية مستخدماً أسلوب المرحلتين:

أ-

$\text{Min. } Z = 3X_1 + 5X_2$

S.T

$X_1 \le 4$

$2X_2 = 12$

$3X_1 + 2X_2 \ge 18$

$X_1 , X_2 \ge 0$

ب-

$\text{Min. } Z = X_1 + 3X_2$

S.T

$X_1 + X_2 \ge 4$

$2X_1 + X_2 \le 6$

$X_2 = 3$

$X_1 , X_2 \ge 0$

الوحدة الثالثة

حالات خاصة في البرمجة الخطية

حالات خاصة في البرمجة الخطية:

في مجرى البحث عن الحل الأمثل لمشاكل البرمجة الخطية تظهر حالات خاصة تنجم عن عدم الدقة في صياغة النماذج الرياضية أو في تحديد العوامل المؤثرة على المسألة موضوع البحث ومن أهم هذه الحالات:

1- انحلال الحل (التفكك / التفسخ / التكرار) Degeneracy.

2-تعدد الحلول المثلى Alternate optimal solution.

3- عدم وجود حلول ممكنة (تعذر الحل) Infeasible solution.

4- عدم توفر حدود Unbounded solution.

1- انحلال الحل:

أ- بالرسم البياني:

يظهر انحلال الحل بالرسم البياني عند وجود قيد فائض غير ذي أهمية لا يؤثر على تحديد منطقة الحل الممكنة.

مثال:

$$Max.\ Z = 5X_1 + 10X_2$$

S.T

$$X_1 + 3X_2 \le 6$$

$$2X_1 + 2X_2 \le 4$$

$$X_1 , X_2 \ge$$

وعند تمثيل هذه المشكلة بالرسم البياني تظهر لنا كما يلي:

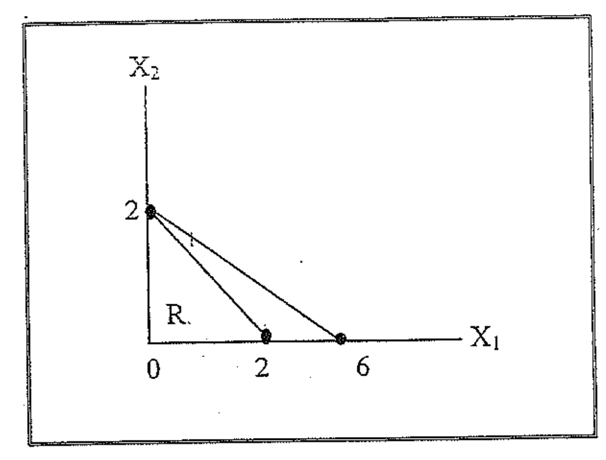
بسم الله الرحمن الرحيم

﴿ وَقُلِ اعْمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُ وَالْمُؤْمِنُونَ ﴾

صدق الله العظيم

الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية

(بحوث العمليات)



نلاحظ هنا بأن القيد الأول خارج منطقة الحلول الممكنة (R)، وبالتالي فإن هذا القيد هو قيد فائض يجب استبعاده لعدم تأثيره على الحل.

ب- بطريقة السمبلكس:

يظهر انحلال الحل بطريقة السمبلكس عند الوصول إلى حل في مرحلة من المراحل وقد ظهر لنا أكثر من متغير خارج في نفس الجولة والذي يعني ظهور أكثر من عنصر محوري عند استخدام قاعدة أقل النسب لتحديد الصف المحوري، والسبب في تعدد العناصر المحورية نابع من وجود قيد أو أكثر فائض ولأنه لا يمكن إخراج أكثر من متغير في الجولة الواحدة من الحل لتطويره فإن قيمة باقي المتغيرات الأساسية (b) ستصبح مساوية للصفر في الجولات التالية الأمر الذي يعني ظهور انحلال في الحل يتمثل في عدم تحسن قيمة دالة الهدف.

مثال:

$$Max.\ Z = 5X_1 + 10X_2$$

S.T

$$X_1 + 3X_2 \le 6$$
$$2X_1 + 2X_2 \le 4$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

C		5	10	0	0		
		X_1	X_2	S_1	S_2	b	Ratio
0	S_1	1	(3)	1	0	6	$\frac{6}{3} = 2$
0	S_2	2	(2)	0	1	4	$\frac{4}{2} = 2$
Z		0	0	0	0	0	
C-Z		5	10	0	0		

C		5	10	0	0	
		X_1	X_2	S_1	S_2	b
10	X_2	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	2
0	S_2	($\frac{4}{3}$)	0	$\frac{-2}{3}$	1	(0)
Z		$\frac{10}{3}$	10	$\frac{10}{3}$	0	20
C-Z		$\frac{5}{3}$	0	$\frac{-10}{3}$	0	

C		5	10	0	0	
		X_1	X_2	S_1	S_2	b
10	X_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{4}$	2
5	X_1	1	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{3}{4}$	(0)
Z		5	10	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{4}$	20
C-Z		0	0	$\frac{-5}{2}$	$\frac{-5}{4}$	

يلاحظ أن حالة الانحلال في الحل قد ظهرت في المرحلة الثانية واستمرت في المرحلة الثالثة رغم الحصول على الحل الأمثل ولذلك لم تتحسن قيمة دالة الهدف وبقيت عند (20) في كلا المرحلتين.

2- تعدد الحلول المثلى:

أ- بالرسم البياني:

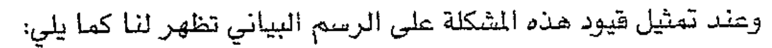
يمكن التعرف على أن لمشكلة البرمجة الخطية أكثر من حل أمثل عندما تكون معادلة دالة الهدف موازية إلى معادلة أحد القيود المحايدة والقيد المحايد هو القيد المحدد لمنطقة الحلول الممكنة.

مثال:

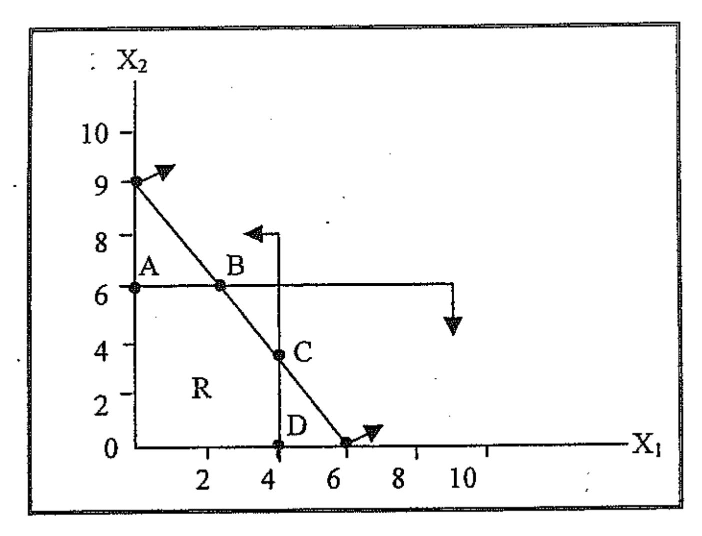
$$\text{Max. } Z = 3X_1 + 2X_2$$

S.T

$$X_1 \le 4$$
$$X_2 \le 6$$
$$3X_1 + 2X_2 \ge 18$$



وعند تمثيل قيود هذه المشكلة على الرسم البياني تظهر لنا كما يلي:



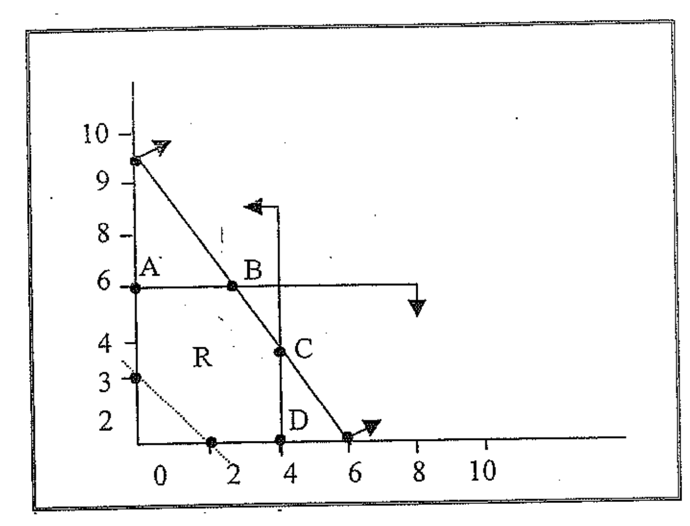
ولرسم دالة الهدف نفترض أنها تساوي حاصل ضرب معامل المتغير X1 في معامل المتغير X_2.

$$Z = (3)(2) = 6$$

$$3X_1 + 2X_2 = 6$$

وبالتالي فلو افترضنا أن قيمة X_2 تساوي صفر فهذا يعني أن قيمة X_1 تساوي (2)، وبالعكس لو افترضنا أن قيمة X_1 تساوي صفر، فهذا يعني أن قيمة X_2 تساوي (3).

وعند تمثيل دالة الهدف بالرسم البياني تظهر لنا كما يلي:



إن الخط المتقطع هو خط دالة الهدف ولأنه موازي للقيد الثالث المحايد فهذا يعني أن لمشكلة البرمجة الخطية أعلاه أكثر من حل أمثل. وللتأكد من أن لهذه المشكلة أكثر من حل أمثل، نحدد نقاط الحل (A, B, C, D) ونجد قيم هذه النقاط كما تعلمناها في الوحدة الثانية ونعوضهم بدالة الهدف لنجد أكثر من قيمة مثالية متساوية، أي أن هنالك تعدد حلول مثلى.

ب- بطريقة السمبلكس:

يستدل على وجود حل أمثل آخر أو أكثر في حالة استخدام طريقة السمبلكس عندما نصل إلى الحل الأمثل ولا يزال أحد المتغيرات غير الأساسية $X_1, X_2, \dots X_n$ لم يدخل الحل بعد. مع ملاحظة أن إدخاله في الحل لن يغير من قيمة دالة الهدف.

مثال:

$$\text{Max. } Z = 6X_1 + 2X_2$$

S.T

$$12X_1 + 4X_2 \leq 200$$
$$3X_1 + 5X_2 \leq 150$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

C		6	2	0	0	
		X_1	X_2	S_1	S_2	b
0	S_1	(12)	4	1	0	200
0	S_2	3	5	0	1	150
Z		0	0	0	0	0
C-Z		6	2	0	0	

C		6	2	0	0	
		X_1	X_2	S_1	S_2	b
6	X_1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{200}{12}$
0	S_2	0	4	$\frac{-1}{4}$	1	100
Z		6	2	$\frac{1}{2}$	0	100
C-Z		0	0	$\frac{-1}{2}$	0	

وحيث أن كافة القيم في صف (C-Z) صفرية أو سالبة والهدف هو التعظيم فإن الحل الأمثل قد تحقق حيث:

$$Z = 100 \, , X_2 = 0 \quad , X_1 = \frac{200}{12}$$

نلاحظ في الجدول أعلاه أن المتغير غير الأساسي X_1 قد دخل الحل وبالتالي فإن معامل ارتباطه مع دالة الهدف مساوياً للصفر أما المتغير غير

الأساسي الثاني X_2 فلم يدخل الحل ومع ذلك نجد أن معامل ارتباطه مع دالة الهدف يساوي صفراً أيضاً وهذا مخالف لقواعد السمبلكس التي تنص على أنه إذا لم يدخل الحل أحد المتغيرات غير الأساسية فإن معاملة مع دالة الهدف يجب أن لا تكون مساوية للصفر، وهذا يعطي الدليل على وجود حل أمثل بديل آخر.

كيف نحدد الحل الأمثل البديل؟

إن الحل الأمثل البديل يمكن تحديده من خلال الرجوع إلى جدول الحل الأمثل السابق واعتبار المتغير غير الأساسي X_2 الذي معامل ارتباطه مع دالة الهدف مساويا للصفر متغير داخل كما يلي:

C		6	2	0	0		
		X_1	X_2	S_1	S_2	b	Ratio
6	X_1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{200}{12}$	50
0	S_2	0	(4)	$\frac{-1}{4}$	1	100	25
Z		6	2	$\frac{1}{2}$	0	100	
C-Z		0	0	$\frac{-1}{2}$	0		

- المعادلة المحورية هي [25، $\frac{1}{4}$، $\frac{-1}{16}$، 1، 0]
- قيم X_1 الجديدة =[$\frac{100}{12}$، $\frac{-1}{12}$، $\frac{5}{48}$، 0، 1]

وعند تعويض قيم المعادلة المحورية وقيم X_1 الجديدة في جدول حل جديد، تظهر لنا قيم Z وقيم C-Z كما يلي:

C		6	2	0	0	
		X_1	X_2	S_1	S_2	b
6	X_1	1	0	$\frac{5}{48}$	$\frac{-1}{12}$	$\frac{100}{12}$
2	X_2	0	1	$\frac{-1}{16}$	$\frac{1}{4}$	25
Z		6	2	$\frac{1}{2}$	0	100
C-Z		0	0	$\frac{-1}{2}$	0	

وحيث أن كافة القيم في صف (C-Z) صفرية أو سالبة فإن الحل الأمثل قد تحقق حيث:

$$Z = 100\ ,\ X_2 = 25,\quad X_1 = \frac{200}{12}$$

نلاحظ بأن قيمة دالة الهدف في هذا الحل لم تتغير عما هي عليه في الحالة السابقة، وبذلك أصبح لدينا حلين أساسيين بديلين هما:

الحل الأول	$Z = 100$	$X_2 = 0$	$X_1 = \frac{200}{12}$
الحل الثانى	$Z = 100$	$X_2 = 25$	$X_1 = \frac{100}{12}$

3- عدم وجود حلول ممكنة (تعذر الحل):

أ- بالرسم البياني:

تظهر مشكلة عدم وجود حلول ممكنة بالرسم البياني من خلال عدم تشكل منطقة حلول ممكنة على الإطلاق. وتحدث هذه الحالة عندما تضم المشكلة قيوداً متعارضة تجعل منطقة الحل للقيود في هذه الحالة متعاكسة لا تتقاطع في منطقة حل واحدة على الأقل.

مثال:

$$Max.\ Z = X_1 + 4X_2$$

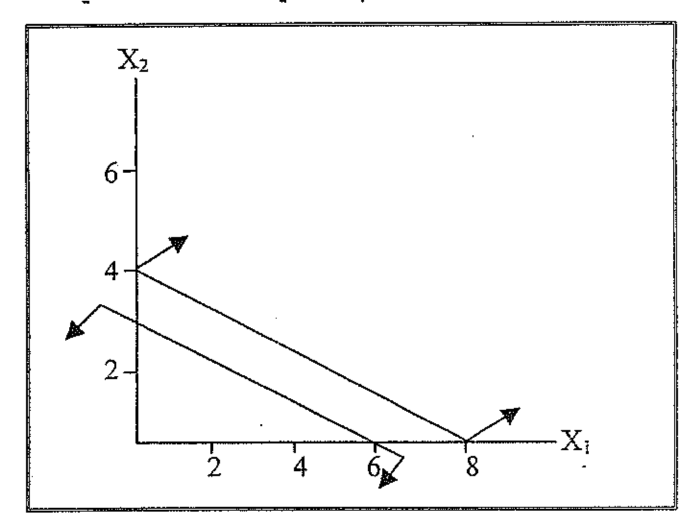
S.T

$$X_1 + 2X_2 \leq 6$$

$$\frac{3}{2}X_1 + 3X_2 \geq 12$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

فعند تحديد منطقة الحل بالرسم البياني تظهر لنا كما يلي



ونلاحظ هنا أن منطقتنا الحل للقيدين الأول والثاني متعاكستان ولا يتقاطعان نهائياً وبالتالي تعذر الحل.

ب- طريقة السمبلكس:

نقول أن لا حلول ممكنة لمسألة برمجة خطية بطريقة السمبلكس إذا تحقق شرط الأمثلية في ظل وجود متغير اصطناعي (R) في عمود الحل (عمود المتغيرات الأساسية) بقيمة موجبة (أكبر من صفر)، فالقيمة الموجبة لهذا المتغير الاصطناعي تعني أن أحد قيود المشكلة غير منطقي ومتناقض مع القيد الآخر، فقاعدة السمبلكس للأمثلية تشترط خروج كافة قيم المتغيرات الاصطناعية من عمود الحل عند الوصول للحل الأمثل. علماً بأن سبب وجود المتغير الاصطناعي هو وجود قيد من نوع أكبر أو يساوي:

مثال:

$$Max.\ Z = 2X_1 + X_2$$

S.T

$$3X_1 + 2X_2 \leq 6$$

$$2X_1 + 3X_2 \geq 12$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

C		2	1	0	0	-M		
		X_1	X_2	S_1	S_2	R	b	Ratio
0	S_1	3	2	1	0	0	6	3
-M	R	2	3	0	-1	1	12	4
Z		-2M	-3M	0	M	-M	-12M	
C-Z		2+2M	1+3M	0	-M	0		
1	X_2	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	3	
-M	(R)	$\frac{-5}{2}$	0	$\frac{-3}{2}$	-1	1	(3)	
Z		$\frac{3}{2}+\frac{5}{2}M$	1	$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}M$	M	-M	3-3M	
C-Z		$\frac{1}{2}-\frac{5}{2}M$	0	$\frac{-1}{2}-\frac{3}{2}M$	-M	0		

نلاحظ في الجدول أن الحل الأمثل قد تحقق حيث كافة القيم في صف C-Z صفرية أو سالبة، إلاّ أن هذا الحل يتضمن متغير اصطناعي (R) في عمود الحل بقيمة موجبة هي (3) وهذا يعني أن مسألة البرمجة الخطية حالة خاصة من نوع عدم إمكانية الحل.

4- عدم توفر حدود:

أ- بالرسم البياني:

يمكن ملاحظة عدم توفر حدود لمشكلة برمجة خطية باستخدام الرسم البياني عندما تكون منطقة الحل مفتوحة من أحد الاتجاهات وبالتالي فهي

منطقة ليس مغلقة. وتحدث هذه الحالة بسبب ضعف في صياغة المشكلة، فمثلاً ليس من المعقول إمكانية تحقيق أرباح غير محددة من موارد محدودة. ونلاحظ هذه الحالة عندما تكون معاملات أحد المتغيرات في جميع قيود المشكلة سالبة أو تساوي صفر.

مثال:

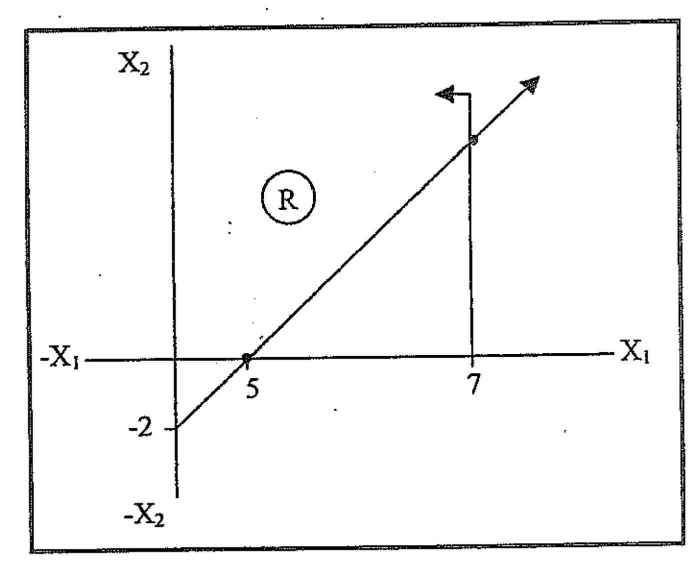
$$\text{Max. } Z = X1 + 2X2$$

S.T

$$X_1 - 2X_2 \le 5$$

$$X_1 \le 7$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$



نلاحظ بعد تمثيل قيود المشكلة بالرسم البياني أن منطقة الحل مفتوحة من أعلى وبالتالي ليس لها حدود.

ب- طريقة السمبلكس:

يستدل على وجود عدم توفر حدود بطريقة السمبلكس عندما يمكن تحديد المتغير الداخل ولا يمكن تحديد المتغير الخارج لتحديد العنصر المحوري وبالتالي الصف المحوري. وسبب عدم القدرة على تحديد المتغير الخارج هو أن كافة قيم العمود المحوري صفرية أو سالبة الأمر الذي يترتب عليه أن تصبح كافة قيم المتغيرات الخارجة سالبة والتي تشترط طريقة السمبلكس إهمالهم.

مثال:

$$Max.\ Z = 3X_1 + 2X_2$$

S.T

$$X_1 - X_2 \leq 1$$
$$3X_1 - 2X_2 \leq 6$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

C		3	2	0	0	b	Ratio
		X_1	X_2	S_1	S_2		
0	S_1	(1)	-1	1	0	1	1
0	S_2	3	-2	0	1	6	2
Z		0	0	0	0	0	
C-Z		3	2	0	0		

3	X_1	1	-1	1	0	1
0	S_2	0	(1)	-3	1	3
Z		3	-3	3	0	3
C-Z		0	5	-3	0	

		X_1	X_2	S_1	S_2	/b	Ratio
3	X_1	1	0	-2	1	4	تهمل
2	X_2	0	1	-3	1	3	تهمل
Z		3	2	-12	5	18	
C-Z		0	0	12	-5		

نلاحظ بعد هذا المستوى من تحسين الحل بأن الحل الأمثل لم يتحقق بعد لوجود قيمة موجبة في صف (C-Z)، الأمر الذي يتطلب تحسين الحل ثانية. فالمتغير (S_1) هو المتغير الداخل لأن قيمته موجبة أما المتغير الخارج فلا يمكن تحديده لأن كافة قيم العمود المحوري سالبة تجعل حاصل قسمة قيم المتغيرات الأساسية (b) عليها سالبة يجب إهمالها. وهذا يعني أن مشكلة البرمجة موضوع البحث فيها عدم محدودية حل يمكن فيها تعظيم الهدف بشكل غير محدود مع محدودية القيود.

أسئلة الوحدة الثالثة

السؤال الأول:

بين بالرسم البياني أن نماذج البرمجة الخطية التالية تحتوي على انحلال (تكرار) حل.

أ-

$$Max.\ Z = 6X_1 + 4X_2$$

S.T

$$3X_1 + 2X_2 \le 12$$

$$X_1 + 2X_2 \le 8$$

$$X_2 \le 8$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

ب-

$$Max.\ Z = 3X_1 + 7X_2$$

S.T

$$2X_1 + 8X_2 \le 16$$

$$2X_1 + 4X_2 \le 8$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

السؤال الثاني:

بين مستخدماً طريقة السمبلكس أن نموذج البرمجة الخطية التالي يحتوي على انحلال (تكرار) حل.

$$Max.\ Z = 3X_1 + 2X_2$$

S.T

$$4X_1 + 3X_2 \le 12$$

$$4X_1 + X_2 \le 8$$

$$4X_1 - X_2 \le 8$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

السؤال الثالث:

بين بالرسم البياني أن نماذج البرمجة الخطية التالية تحتوي على حل متكرر:

أ-

$$Max.\ Z = 2X_1 + 4X_2$$

S.T

$$X_1 + 2X_2 \le 5$$

$$X_1 + X_2 \le 4$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

ب-

$$Max.\ Z = 8X_1 + 4X_2$$

S.T

$$4X_1 + 2X_2 \le 8$$

$$2X_1 + 2X_2 \le 6$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

السؤال الرابع:

بين مستخدماً طريقة السمبلكس أن نموذج البرمجة الخطية التالي يحتوي على حل متكرر

$$\text{Max. } Z = 6X_1 + 2X_2$$

S.T

$$12X_1 + 4X_2 \le 200$$
$$3X_1 + 5X_2 \le 150$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

السؤال الخامس:

بين بالرسم البياني أن نماذج البرمجة الخطية التالية ليس لها حل ممكن بالرسم البيان:

أ-

$$\text{Max. } Z = 2X_1 + X_2$$

S.T

$$3X_1 + 2X_2 \le 6$$
$$2X_1 + 3X_2 \ge 12$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

ب-

$$\text{Max. } Z = 3X_1 + 4X_2$$

S.T

$$2X_1 + 4X_2 \le 6$$
$$X_1 - 2X_2 \ge 8$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

السؤال السادس:

بين أن منطقة الحل لنماذج البرمجة الخطية التالية غير محددة.

أ-

$$\text{Max. } Z = 3X_1 + 2X_2$$

S.T

$$X_1 - X_2 \le 1$$
$$3X_1 - 2X_2 \le 6$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

ب-

$$\text{Max. } Z = 4X_1 + 2X_2$$

S.T

$$3X_1 - 2X_2 \le 60$$
$$2X_1 - 2X_2 \le 20$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

السؤال السابع:

بين مستخدماً طريقة السمبلكس أن ليس لنموذج البرمجة الخطية التالي حلاً محدداً.

$$\text{Max. } Z = 5X_1 + 8X_2$$

S.T

$$X_1 \ge 8$$
$$X_2 \le 15$$
$$X_1 + X_2 \ge 15$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

الوحدة الرابعة

النموذج المقابل / النظرية الثنائية

The dual In Linear Programming

تحويل النموذج الأولي إلى النموذج المقابل:

ذكرنا سابقاً بأن البرمجة الخطية تبحث في توزيع الموارد المحددة بين الاستخدامات البديلة ضمن إطار القيود المفروضة لتحقيق أهداف المنشأة كتعظيم الأرباح أو خفض التكاليف. وإن استخدام البرمجة الخطية يستلزم توفر شروط معينة مثل القدرة على تحديد المشكلة موضوع البرمجة تحديداً رياضياً دقيقاً على شكل دالة خطية تسمى دالة الهدف والقدرة على تحديد القيود أو مجموعة المحددات التي تحد من درجة تحقيق الأهداف تحديداً رياضياً أيضاً على شكل متباينات.

إن تحديد المشكلة موضوع البرمجة وكذلك القيود المفروضة عليها تحديداً رياضياً على شكل متباينات هو الصيغة الأولى لمشكلة البرمجة الخطية ويطلق عليه اسم النموذج الأولي (Primal Model)، ويقترن بهذا النموذج الأولي نموذج آخر يطلق عليه النموذج المقابل (Dual Model) ولكل نموذج مقابل هنالك حل أمثل مماثل للحل في النموذج الأولي، أي أن النموذج المقابل هو الوجه الآخر للمشكلة الأصلية.

إن اللجوء إلى استخدام النموذج المقابل يتضمن فوائد متعددة منها تقليل الجداول والعمليات الحسابية خاصة في حالة:

1- أن عدد قيود النموذج الأولي أكثر من عدد المتغيرات المتضمنة فيه.

2- إذا كانت إشارات القيود من نوع (≥) أكبر أو يساوي والتي تتطلب إضافة متغيرات اصطناعية.

مثال:

$$\text{Min } Z = 0.07X_1 + 0.05X_2$$

S.T

$0.1X_1 + 0X_2 \geq 0.4$

$0X_1 + 0.1X_2 \geq 0.6$

$0.1X_1 + 0.2X_2 \geq 2$

$0.2X_1 + 0.1X_2 \geq 1.8$

$X1, X2 \geq 0$

إن النموذج المقابل لهذه المشكلة هو:

$Max.\ w = 0.4y_1 + 0.6y_2 + 2y_3 + 1.8y_4$

S.T

$0.1y_1 + 0y_2 + 0.1y_3 + 0.2y_4 \leq 0.07$

$0y_1 + 0.1y_2 + 0.2y_3 + 0.1y_4 \leq 0.05$

$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$

نلاحظ في النموذج الأولي أن عدد القيود أربعة في حين أن عدد المتغيرات في دالة الهدف إثنان الأمر الذي سيؤدي إلى إطالة خطوات الحل. كما ونلاحظ أن اتجاه المتباينات من نوع (≥) أكبر أو يساوي وهذا يتطلب متغيرات اصطناعية. وعند تحويل النموذج الأولي إلى المقابل أصبحت عدد القيود اثنان بدلاً من أربعة وهذا سيقلل من خطوات الحل، واتجاه المتباينات أصبحت من نوع (≤) أقل أو يساوي وهذا لا يتطلب إضافة متغيرات اصطناعية.

إن السؤال الذي سيطرح نفسه الآن هو كيف تم تحويل النموذج الأولي إلى النموذج المقابل في هذا المثال؟؟؟

للإجابة على هذا السؤال علينا السير بالخطوات التالية والتحقق من بعض الشروط كما يلي:

1- نضع معاملات المتغيرات للقيود ودالة الهدف في مصفوفة كما يلي:

	0.1	0	0.4
	0	0.1	0.6
	0.1	0.2	2.0
	0.2	0.1	1.8
$Z \Rightarrow$	0.07	0.05	0

2- نغير مواقع الأعمدة والصفوف بحيث نجعل معاملات دالة الهدف في النموذج الأولي قيم متجهة الثوابت في النموذج المقابل ومعاملات متجهة الثوابت في النموذج الأولي معاملات دالة الهدف في النموذج المقابل كما يلي:

	0.1	0	0.1	0.2	0.07
	0	0.1	0.2	0.1	0.05
$W \Rightarrow$	0.4	0.6	2.0	1.8	0

3- إذا كانت دالة الهدف في النموذج الأولي تعظيم تصبح في النموذج المقابل تصغير والعكس صحيح.

4- إذا كان اتجاه المتباينات (≤) أصغر أو يساوي تصبح في النموذج المقابل (≥) أكبر أو يساوي والعكس صحيح.

5- التحقق من أن عدد القيود في النموذج الأولي يساوي عدد المتغيرات في دالة الهدف في النموذج المقابل وأن عدد متغيرات دالة الهدف في النموذج الأولي يساوي عدد القيود في النموذج المقابل.

وبالتالي فإن النموذج المقابل للمشكلة السابقة هو:

$Max.\ w = 0.4y_1 + 0.6y_2 + 2.0y_3 + 1.8y_4$

S.T

$0.1y_1 + 0\ y_2 + 0.1y_3 + 0.2y_4 \leq 0.07$

$0y_1 + 0.1y_2 + 0.2y_3 + 0.1y_4 \le 0.05$

$y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0$

الذي حقق الشروط من (3-5) السابقة.

ملاحظة:

تفترض عملية التحويل من نموذج أولي إلى نموذج مقابل أنه:

1- إذا كان الهدف في المشكلة هو التعظيم، فيجب أن يرتبط التعظيم مع متباينات جميعها بنفس الاتجاه وفي صيغة (≤) أصغر أو يساوي.

2- إذا كان الهدف في المشكلة هو التقليل، فيجب أن يرتبط التقليل مع متباينات جميعها بنفس الاتجاه أيضاً وفي صيغة (≥) أكبر أو يساوي.

وبعكس هذا الأمر يجب إعادة الترتيب بما يتوافق مع هذه الشروط وفق الاحتمالات التالية:

أ- الهدف تعظيم إلاّ أن أحد القيود (≥) أكبر أو يساوي.

في مثل هذه الحالة نضرب طرفي القيود بـ (-1) ونقلب الإشارة إلى (≤) أصغر أو يساوي.

ب- الهدف تصغير إلاّ أن أحد القيود (≤) أصغر أو يساوي.

وهنا أيضاً نضرب طرفي القيد بـ (-1) ونقلب الإشارة إلى (≥) أكبر أو يساوي.

جـ- عندما يكون أحد القيود عبارة عن مساواة.

في مثل هذه الحالة يتم تحويل القيد الذي يحمل علامة المساواة إلى متباينتين مختلفتين بالاتجاه، ثم نضرب القيد المعاكس لدالة الهدف بـ (-1).

مثال:

$\text{Min. } Z = 5X_1 + 8X_2$

S.T

$3X_1 + 2X_2 = 10 \quad \ldots\ldots (1)$

$2X_1 + X_2 \ge 9 \quad \ldots\ldots (2)$

$X_1, X_2 \ge 0$

الحل:

$3X_1 + 2X_2 \ge 10 \quad \ldots\ldots (1)$

$-1\,[\,3X_1 + 2X_2 \le 10\,]$

$-3X_1 - 2X_2 \ge -10 \quad \ldots\ldots (2)$

$\Rightarrow \text{Min. } Z = 5X_1 + 8X_2$

S.T

$3X_1 + 2X_2 \ge 10 \quad \ldots\ldots (1)$

$-3X_1 - 2X_2 \ge -10 \quad \ldots\ldots (2)$

$2X_1 + X_2 \ge 9 \quad \ldots\ldots (3)$

$X_1, X_2 \ge 0$

نلاحظ بان قيود المشكلة قد أصبحوا ثلاثة قيود بدلاً من قيدين، وعليه فإن النموذج المقابل لهذه المشكلة هو:

$\text{Max. } y = 10y_1 - 10y_2 + 9y_3$

S.T

$3y_1 - 3y_2 + 2y_3 \le 5$

$2y_1 - 2y_2 + y_3 \le 8$

$y_1, y_2, y_3 \ge 0$

الحل البياني للنموذج المقابل:

إن الحل البياني للنموذج المقابل لا يختلف في الأسلوب عن الحل البياني للنموذج الأولي، مع ملاحظة أن الحلين لمشكلة ما يتطابقان والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال: إذا كانت لديك النموذج الأولي التالي:

$$Max.\ Z = 2X_1 + 3X_2$$

S.T

$X_1 + 2X_2 \leq 4$

$3X_1 + X_2 \leq 6$

$X_1, X_2 \geq 0$

المطلوب:

1- اكتب النموذج المقابل.

2- أوجد الحل الأمثل للنموذج الأولي باستخدام الطريقة البيانية.

3- أوجد الحل الأمثل للنموذج المقابل باستخدام الطريقة البيانية.

الحل:

-1

1	2	4
3	1	6
2	3	0

→

1	3	2
2	1	3
4	6	0

$$Min.\ w = 4y_1 + 6y_2$$

S.T

$y_1 + 3y_2 \geq 2$

$2y_1 + y_2 \geq 3$

$y_1, y_2 \geq 0$

2- للوصول إلى الحل الأمثل نطبق الخطوات التالية:

أ- تحويل متباينات القيود إلى معادلات كما يلي:

$X_1 + 2X_2 = 4$

$3X_1 + X_2 = 6$

ب- تحديد نقاط تقاطع متغيرات القيود مع المحاور كما يلي:

$X_1 + 2X_2 = 4$ .... (1)

$If\ X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 2$

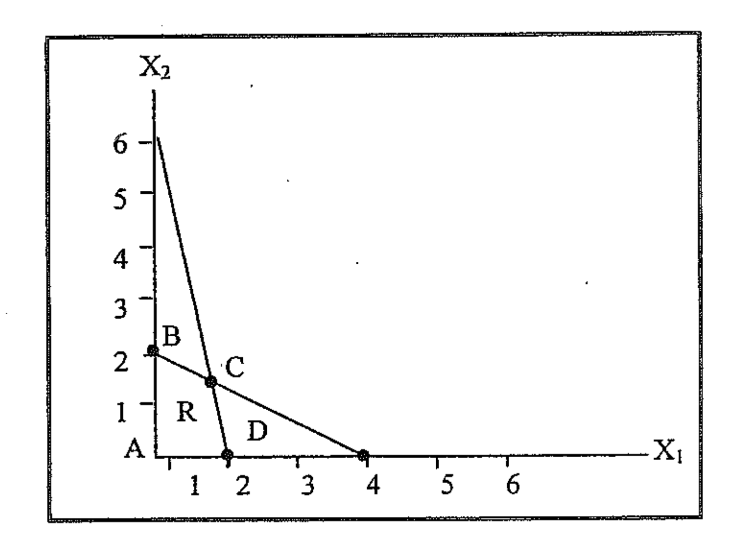
$X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 4$

$3X_1 + X_2 = 6$ .... (2)

$If\ X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 6$

$X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 2$

جـ- رسم القيود على الشكل البياني كما يلي:



د- تحديد الحل الأمثل والذي يقع على أحد نقاط زوايا المضلع ABCD.

النقاط	قيم إحداثيات النقاط		قيمة دالة الهدف
	X_1	X_2	$Z=2X_1+3X_2$
A	0	0	Z = 0
B	0	2	Z= 6
C	?	?	Z = ?
D	2	0	Z = 4

ولإيجاد قيم إحداثيات النقطة (C)، يتم حل معادلات المستقيمين المتقاطعين كما يلي:

$$X_1+2X_2=4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

$$-2\,[\,3X_1+X_2=6\,] \quad \ldots\ldots\ (2)$$

$$X_1+2X_2=4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (3)$$

$$-6X_1-2X_2=-12 \quad \ldots\ldots\ldots\ (4) \quad +$$

$$-5X_1=-8$$

$$X_1=\frac{-8}{-5}=\frac{8}{5}$$

$$\frac{8}{5}+2X_2=4$$

$$2X_2=4-\frac{8}{5}$$

$$2X_2=\frac{12}{5} \Rightarrow X_2=\frac{6}{5}$$

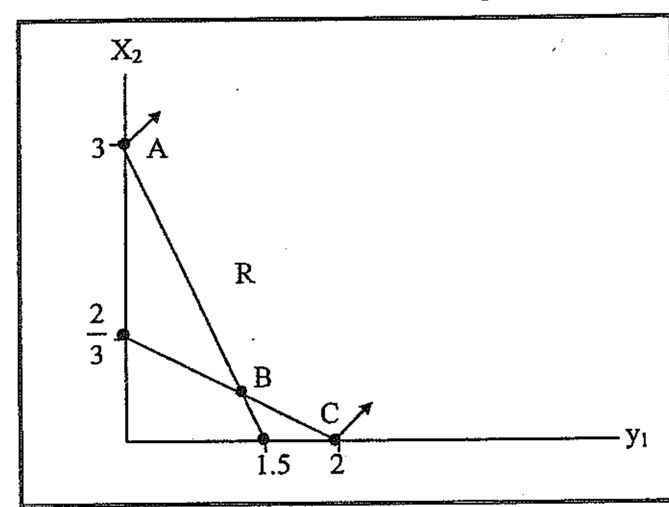
أي أن قيم إحداثيات النقطة (C) هي $\left(\frac{8}{5}\ ،\ \frac{6}{5}\right)$، وبتعويض هذه القيم في دالة الهدف نحصل على:

$$Z=2\left(\frac{8}{5}\right)+3\left(\frac{6}{5}\right)=\frac{16}{5}+\frac{18}{5}=6.8$$

وبمقارنة قيم البدائل الأربعة، نجد أن البديل الأفضل هو عند النقطة (C) حيث تعطي أكبر قيمة لـ Z. أي أن الحل الأمثل للنموذج الأولي هو:

$$X_1=\frac{8}{5}\ ,\ X_2=\frac{6}{5},\ Z=6.8$$

3- الوصول إلى الحل الأمثل للنموذج المقابل، نتبع نفس الخطوات السابقة والتي ستؤدي إلى الشكل التالي:



النقاط	y_1	y_2	$w=4y_1+6y_2$
A	0	3	w = 18
B	?	?	w = ?
C	2	0	w = 8

$$y_1 + 3y_2 = 2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$-3\,[\,2y_1 + y_2 = 3\,] \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$y_1 + 3y_2 = 2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$-6y_1 - 3y_2 = -9 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4) \quad +$$

$$-5y_1 = -7$$

$$y_1 = \frac{7}{5}$$

$$\frac{7}{5} + 3y_2 = 2$$

$$3y_2 = 2 - \frac{7}{5}$$

$$y_2 = \frac{1}{5}$$

وبتعويض قيم y_1, y_2 في دالة الهدف نحصل على:

$$w = 4\left(\frac{7}{5}\right) + 6\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$= \frac{28}{5} + \frac{6}{5} = 6.8$$

وبالتالي فإن الحل الأمثل هو:

$$y_1 = \frac{7}{5}\ , y_2 = \frac{1}{5}, w = 6.8$$

$$\Rightarrow Z = w = 6.8$$

الطريقة المبسطة لحل النموذج المقابل:

تكمن أهمية إيجاد الحل الأمثل للنموذج المقابل بدلاً من إيجاد الحل الأمثل للنموذج الأولي هو لتسهيل العمليات الحسابية وتقليل عدد الجداول خاصة في

حالة أن عدد قيود النموذج الأولي أكثر من عدد المتغيرات المتضمنة فيه أو إذا كانت إشارات القيود من نوع (≥) أكبر أو يساوي والتي تتطلب إضافة متغيرات اصطناعية.حيث يمكن استنتاج حل النموذج الأولي من حل النموذج المقابل وبالعكس. فقيم المتغيرات $(y_1, y_2, \ldots y_n)$ في جدول الحل الأمثل للنموذج المقابل هي معاملات المتغيرات الأساسية $(S_1, S_2, \ldots S_n)$ في صف C-Z في جدول الحل الأمثل للنموذج الأولي. وقيم المتغيرات $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ في جدول الحل الأمثل للنموذج الأولي هي معاملات المتغيرات الأساسية $(S_1,S_2,\ldots S_n)$ في صف C-W في جدول الحل الأمثل للنموذج المقابل. والمثال التالي يوضح هذه الفكرة.

مثال:

إذا كان جدول الحل الأمثل للنموذج المقابل للمشكلة الأولية التالية:

$$\text{Min. } Z = X_1 + X_2$$

S.T

$$0.12X_1 + 0.04X_2 \geq 600$$

$$0.10X_1 + 0.40X_2 \geq 1000$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

هو كما يلي:

C		600	1000	0	0	
		y_1	y_2	S_1	S_2	
600	y_1	1	0	$\frac{100}{11}$	$\frac{-25}{11}$	$\frac{75}{11}$
1000	y_2	0	1	$\frac{-10}{11}$	$\frac{30}{11}$	$\frac{20}{11}$
W		600	1000	$\frac{50000}{11}$	$\frac{15000}{11}$	$\frac{65000}{11}$
C-W		0	0	$\frac{-50000}{11}$	$\frac{-15000}{11}$	

المطلوب:

استنباط قيم متغيرات النموذج الأولي من جدول الحل الأمثل للنموذج المقابل.

الحل:

إن قيم الحل الامثل للنموذج الأولي هي معاملات المتغيرات الأساسية في صف C-W في جدول الحل المقابل أي أن:

$$X_1 = S_1 = \frac{50000}{11}$$

$$X_2 = S_2 = \frac{15000}{11}$$

$$Z = W = \frac{65000}{11}$$

مثال2: إذا كان جدول الحل الأمثل للمشكلة الأولية التالية:

$$\text{Min. } Z = 0.07X_1 + 0.05X_2$$

S.T

$$0.1X_1 + 0X_2 \geq 0.4$$

$$0X_1 + 0.1X_2 \geq 0.6$$

$$0.1X_1 + 0.2X_2 \geq 2.0$$

$$0.2X_1 + 0.1X_2 \geq 1.8$$

هو كما يلي:

C		0.07	0.05	0	0	0	0	
		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	
0.07	X_1	1	0	0	0	$\frac{10}{3}$	$\frac{-20}{3}$	$\frac{16}{3}$
0.05	X_2	0	1	0	0	$\frac{-20}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{22}{3}$
Z		0.07	0.05	0	0	−0.1	−0.3	0.74
C-Z		0	0	0	0	0.1	0.3	

المطلوب:

1- كتابة النموذج المقابل للمشكلة الأولية.

2- استنتاج قيم متغيرات النموذج المقابل من جدول الحل الأمثل للنموذج الأولي.

الحل:

-1

$$\text{Max. } W = 0.4y_1 + 0.6y_2 + 2y_3 + 1.8y_4$$

S:T

$$0.1y_1 + 0y_2 + 0.1y_3 + 0.2y_4 \leq 0.07$$

$$0y_1 + 0.1y_2 + 0.2y_3 + 0.1y_4 \leq 0.05$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

-2

$y_1 = S_1 = 0$

$y_2 = S_2 = 0$

$y_3 = S_3 = 0.1$

$y_4 = S4 = 0.3$

$\text{Max. } w = 0.4\,(0) + 0.6\,(0) + 2\,(0.1) + 1.8\,(0.3)$

$= 0 + 0 + 0.2 + 0.54$

$= 0.74$

أسئلة الوحدة الرابعة

السؤال الأول:

اكتب النموذج المقابل لنماذج البرمجة الخطية الأولية التالية:

-1

$\text{Max. } Z = 3X_1 + 5X_2$

S.T

$2X_1 + 6X_2 \leq 50$

$3X_1 + 2X_2 \leq 35$

$5X_1 - 3X_2 \leq 10$

$X_2 \leq 20$

$X_1, X_2 \geq 0$

-2

$\text{Min. } Z = 3X_1 - 2X_2 + 4X_3$

S.T

$3X_1 + 5X_2 + 4X_3 \geq 7$

$6X_1 + X_2 + 3X_3 \geq 4$

$7X_1 - 2X_2 - X_3 \leq 10$

$X_1 - 2X_2 + 5X_3 \geq 3$

$4X_1 + 7X_2 - 2X_3 \geq 2$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

-3

$\text{Max. } Z = 3X_1 + 10X_2 + 2X_3$

S.T

$2X_1 + 3X_2 + 2X_3 \leq 7$

$3X_1 - 2X_2 + 4X_3 = 3$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

-4

$$Max.\ Z = X_1 + X_2 - X_3 - X_4$$

S.T

$$3X_1 - 2X_2 + X_3 + 5X_4 \leq 18$$
$$5X_1 + 6X_3 \leq 20$$
$$-X_1 + X_2 + 4X_3 + X_4 \geq 9$$
$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

السؤال الثاني:

إذا كان لديك النموذج الأولي التالي:

$$Max.\ Z = 2X_1 + 3X_2$$

S.T

$$X_1 + 2X_2 \leq 20$$
$$X_1 + X_2 \leq 12$$
$$X_1, X \geq 0$$

المطلوب:

1- أوجد الحل الأمثل للنموذج الأولي مستخدماً طريقة الرسم البياني.

2- أوجد النموذج المقابل لهذه المشكلة.

3- أوجد الحل الأمثل للنموذج المقابل بالرسم البياني.

السؤال الثالث:

مستخدماً طريقة السمبلكس أوجد الحل الأمثل للنموذج الأولي التالي من الحل الأمثل للنموذج المقابل:

$$Min.\ Z = 4X_1 + 6X_2$$

S.T

$$X_1 + 2X_2 \geq 80$$
$$3X_1 + X_2 \geq 75$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

السؤال الرابع:

مستخدماً طريقة السمبلكس، أوجد الحل الأمثل للنموذج المقابل من الحل الأمثل للنموذج الأولي التالي:

$$Max.\ Z = 2X_1 + 5X_2$$

S.T

$$3X_1 + 5X_2 \leq 8$$
$$2X_1 + 7X_2 \leq 12$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

الوحدة الخامسة

مشكلة النقل

مشكلة النقل:

تعتبر طريقة النقل أو كما تسمى غالباً بمشكلة النقل من الأساليب الرياضية ذات الأهمية في عملية اتخاذ القرارات المتعلقة بنقل حجم معين من السلع أو المواد من مصادر متعددة (مراكز الإنتاج أو المخزون) إلى مراكز متعددة (المراكز التسويقية أو البيعية) بهدف سد احتياجات المراكز ذات العلاقة بأقل كلفة ممكنة من مجموع تكاليف النقل. فمشكلة النقل تأخذ أهميتها من خلال ما تحتله تكاليف النقل من أهمية نسبية مقارنة بمجموع تكاليف الصنع والتوزيع وغيرها.

تعتبر مشكلة النقل من المشاكل الخاصة في البرمجة الخطية، حيث أن النماذج الرياضية المستخدمة في مشكلة النقل هي نماذج خطية والهدف من استخدامها هو إيجاد أسلوب أمثل لتوزيع (نقل أو شحن) سلعة أو مادة ما من مناطق إنتاجها (عرضها) إلى مناطق استهلاكها (طلبها) بحيث تكون كلفة النقل الكلية للسلعة أقل ما يمكن. ومشاكل النقل يمكن حلها باستخدام طريقة السمبلكس في البرمجة الخطية إلاّ أن هذه الطريقة تتطلب خطوات وجداول وعمليات حسابية كثيرة وهذا الأمر تم التغلب عليه من خلال تفريغ كافة مفردات (متغيرات) مشكلة النقل في جدول خاص يسمى جدول النقل وهذه المفردات هي:

1- عدد مراكز التوزيع أو المراكز الإنتاجية أو المخازن.
2- كميات ما هو متوفر من وحدات السلعة المراد نقلها في كل مركز توزيع (عرض).
3- عدد مراكز الاستلام أو المراكز التسويقية أو البيعية.
4- الكميات المطلوبة من وحدات السلعة من كل مركز استلام (طلب).
5- تكلفة نقل الوحدات السلعية من كل مركز توزيع إلى كل مراكز الاستلام.

6- حجم عرض السلع في المصادر الإنتاجية مجتمعة وحجم الطلب على السلع من قبل جميع المراكز التسويقية مجتمعة. فإذا كان حجم العرض يساوي حجم الطلب فإن مشكلة النقل هي مشكلة متوازنة وغير ذلك فإنها مشكلة غير متوازنة يجب أن توازن.

وتعتبر الصيغة الجدولية لمشكلة النقل منطلق المرحلة الأولى وهي مرحلة تحديد الحل الأساسي الأولي الممكن. وهذا الحل الأساسي الأولي الممكن يمكن الوصول إليه من خلال عدة طرق هي:

1- طريقة الركن الشمالي الغربي.

2- طريقة الكلفة الأقل.

3- طريقة فوجل التقريبية (الجزاء).

ثم بعد ذلك تأتي المرحلة الثانية وهي مرحلة الحل الأمثل عن طريق إجراء تحسين على الحل الأولي من خلال طريقتين تستخدمان لهذا الهدف هما:

أ- طريقة المسار المتعرج (التخطي).

ب- طريقة عوامل الضرب (التوزيع المعدل).

علماً بأن شرط الانتقال إلى هذه المرحلة يتطلب ان تكون مشكلة النقل في الحل الأساسي مستوفية للشرط التالي:

[عدد المتغيرات الأساسية (الخلايا المشغولة) = عدد الصفوف + عدد الأعمدة - 1].

مثال:

منشأة زيد الصناعية لها ثلاثة مصانع في مدن (عمان، الزرقاء، اربد) ولها ثلاثة مخازن في مدن (العقبة، الأزرق، الرمثا). إن كميات السلعة المراد نقلها من المصانع الثلاثة وكذلك القدرة الاستيعابية للمخازن الثلاثة هي كما في الجدول التالي:

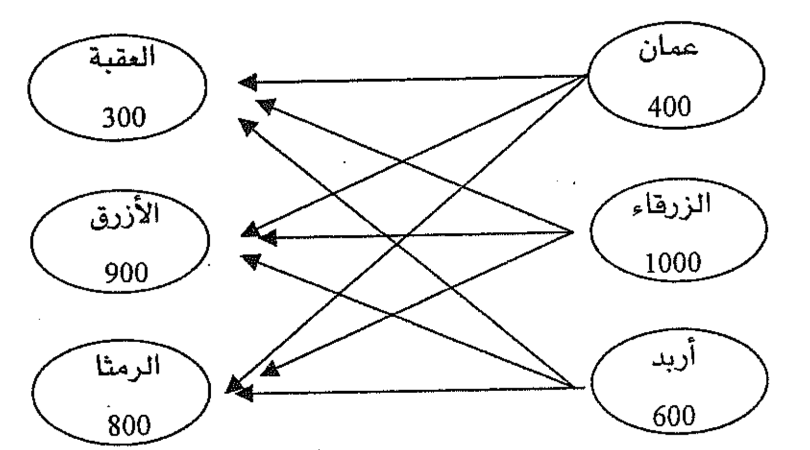
المصنع	الموقع	كميات السلعة	المخازن	الموقع	الطاقة الاستيعابية
A	عمان	400	X	العقبة	300
B	الزرقاء	1000	Y	الأزرق	900
C	اربد	600	Z	الرمثا	800

علماً بأن تكلفة نقل منتجات كل مصنع إلى المخازن الثلاثة هي كما في الجدول التالي:

المخازن / المصانع	العقبة	الأزرق	الرمثا
عمان	31	21	42
الزرقاء	20	21	30
اربد	23	20	15

المطلوب: حدد مسارات النقل التي يمكن لإدارة المنشأة استخدامها في عملية النقل.

الحل:



يوضح هذا الشكل مسارات النقل التي يمكن للإدارة استخدامها في عملية النقل. إلا أنّ السؤال الأكبر الذي يواجه الإدارة هو تحديد عدد الوحدات السلعية الواجب نقلها من كل مصنع إلى كل مخزن بما يحقق لها أقل كلفة ممكنة من مجموع تكاليف النقل للسلع. إن الإجابة على هذا السؤال يتطلب في البداية تفريغ كافة متغيرات مشكلة النقل في جدول النقل كخطوة أولى نحو تحديد الحل الأساسي الأولي الممكن.

الصيغة الجدولية لمشكلة النقل:

تمثل الصيغة الجدولية لمشكلة النقل منطلق إيجاد حل أولي ممكن للوصول إلى الحل الأمثل (النهائي) المتمثل في تحقيق أقل كلفة ممكنة من مجموع تكاليف النقل. والصيغة الجدولية لمشكلة النقل عبارة عن مصفوفة عدد صفوفها (M) تمثل المصادر (مراكز التوزيع) وعدد أعمدتها (n) وتمثل مراكز الاستلام وهو يظهر كما يلي:

المراكز / المصادر	n_1	n_2	....	n_m	عرض المصدر
M_1					
M_2					
⋮					
M_n					
طلب المراكز					المجموع

فعند عرض مفردات مشكلة النقل السابقة في صيغة جدولية تظهر لنا كما يلي:

المراكز / المصادر	العقبة	الأزرق	الرمثا	عرض المصدر
عمان	31	21	42	400
الزرقاء	20	21	30	1000
اربد	23	20	15	600
طلب المراكز	300	900	800	2000

وهو كما ذكرنا سابقاً يمثل المنطلق نحو الحل الأساسي الأولي الممكن.

إيجاد الحل الأساسي الأولي الممكن:

بعد أن يتم إعداد الصيغة الجدولية لمشكلة النقل فإن الخطوة اللاحقة هي إيجاد الحل الأساسي الأولي الممكن، وهناك ثلاثة طرق كما ذكرنا سابقا تستخدم لهذا الغرض هي:

1- طريقة الركن الشمالي الغربي.

2- طريقة أقل التكاليف.

3- طريقة فوجل التقريبية (الجزاء).

وبعد التوصل إلى الحل الأساسي الأولي يجب تدقيق هذا الحل لمعرفة فيما إذا كان هذا الحل أمثلاً أم لا، ويتم الاختيار بإحدى الطريقتين:

أ- المسار المتعرج (التخطي).

ب- عوامل الضرب (التوزيع المعدل).

فإذا وجدنا أن الحل أمثلاً فإن المشكلة تكون قد انتهت، وأما إذا لم تكن فنقوم بتحسين الحل.

أ- طريقة الركن الشمالي الغربي (الزاوية الشمالية الغربية):

حسب هذه الطريقة، يجب التأكد من أن جدول النقل في حالة التوازن (مجموع العرض = مجموع الطلب) وأن تبدأ عملية النقل من الزاوية الشمالية الغربية لجدول التكاليف كما يلي:

المراكز / المصادر	العقبة	الأزرق	الرمثا	عرض المصدر	
عمان	31 300	21 100	42	~~400~~	~~100~~
الزرقاء	20	21 800	30 200	~~1000~~	~~200~~
اربد	23	20	15 600	~~600~~	
طلب المراكز	300	900	800	2000	

1- ننقل (300) وحدة من عمان إلى مخزن العقبة وبالتالي تلبية كافة احتياجات مخزن العقبة ويبقى في مصنع عمان (100) وحدة.

2- ننقل (100) وحدة من عمان إلى مخزن الأزرق، ولم يبقى في مصنع عمان أية وحدة وهناك (800) وحدة يمكن لمخزن الأزرق استيعابهم.

3- ننقل (800) وحدة من مصنع الزرقاء إلى مخازن الأزرق وبالتالي تلبية كافة احتياجات الأزرق وبقي في مصنع الزرقاء (200) وحدة.

4- ننقل (200) وحدة من مصنع الزرقاء إلى الرمثا وبالتالي لم يبقى في مصنع الزرقاء أية وحدة.

5- ننقل (600) وحدة من مصنع اربد إلى مخازن الرمثا وعليه أصبحت حاجة الرمثا صفراً ولم يبقى في مصنع اربد أية وحدة.

6- بعد عمليات النقل السابقة نلاحظ أن الجدول في حالة توازن وهذا يعني أن جدولة النقل قد اكتملت.

7- يتم بعدها احتساب قيمة التكاليف الإجمالية المعبر عنها بدالة الهدف في حالة تخفيض التكاليف وهي مجموع حاصل ضرب عدد الوحدات المنقولة بكلفة نقلها.

$$\text{Min. } Z = 300 \times 31 + 100 \times 21 + 800 \times 21 + 200 \times 30 + 600 \times 15$$

$$= 43200$$

2- طريقة أقل التكاليف:

تعتبر هذه الطريقة أفضل من الطريقة السابقة لأنها تأخذ بعين الاعتبار الأقل تكلفة. وحتى نحصل على الحل الأساسي الأولي الممكن بهذه الطريقة علينا في البداية أن نتأكد من أن جدول النقل في حالة توازن ثم نتبع الخطوات التالية:

أ- نبدأ بتزويد المربع ذا التكلفة الأقل بأكبر ما يمكن من عدد الوحدات من المخزون المقابل لهذا المربع.

ب- نتابع ملئ المربعات ذات التكلفة الأقل بالتتابع إلى أن نزود جميع مراكز التوزيع من المصادر المتوفرة.

جـ- نحسب التكلفة الإجمالية للمربعات المختلفة.

ولتوضيح هذه الطريقة سنعمل على حل مشكلة نقل منشأة زيد السابقة والمجدولة كما يلي:

المراكز / المصادر	العقبة	الأزرق	الرمثا	عرض المصدر
عمان	31	21	42	400
الزرقاء	20	21	30	1000
اربد	23	20	15	600
طلب المراكز	300	900	800	2000

نلاحظ في هذا الجدول أن:

1- أقل تكلفة نقل هي بين إربد والرمثا والمساوية (15) دينار، الأمر الذي يتطلب نقل (600) وحدة من اربد إلى مخازن الرمثا والمقابل بقي في الرمثا طاقة استيعابية مقدارها (200).

2- ثاني أقل تكلفة هي بين الزرقاء إلى العقبة وبين اربد إلى الأزرق وبالتالي نقل (300) وحدة من الزرقاء إلى العقبة التي أصبحت طاقتها الاستيعابية مساوية للصفر بينما بقي في الزرقاء (700) وحدة. وحيث أن كافة عرض اربد قد فرغ في الرمثا لأن كلفتها الأقل، فلا داعي لنقل بضائع من اربد إلى الأزرق.

3- تكلفة نقل البضائع من الزرقاء إلى الأزرق هي (21) ديناراً، وحيث أنه قد بقي في مركز الزرقاء (700) وحدة، فيجب نقلهم إلى الأزرق ليصبح رصيد الزرقاء صفراً والطاقة الاستيعابية لمخازن الأزرق أصبحت (200).

4- تكلفة نقل البضائع من عمان إلى الأزرق هي (21) ديناراً، وحيث أن عرض عمان (400) وحدة والطاقة الاستيعابية لمخازن الأزرق المتبقية هي (200)،

لذلك يتم نقل (200) وحدة من عمان إلى الأزرق ليبقى رصيد عمان (200) وحدة ورصيد مخازن الأزرق صفراً.

5- بقي أن ننقل (200) وحدة من عمان إلى مخازن الرمثا على الرغم من أن تكلفة النقل من عمان إلى الرمثا كبيرة والسبب هو لعدم وجود طاقة استيعابية في كل من الأزرق والعقبة.

وعند وضع هذه الخطوات على الجدول السابق، يظهر لنا كما يلي:

المراكز / المصادر	العقبة	الأزرق	الرمثا	عرض المصدر
عمان	31	21 200	42 200	~~400~~ ~~200~~
الزرقاء	20 300	21 700	30	~~1000~~ ~~700~~
اربد	23	20	15 600	~~600~~
طلب المراكز	300	~~900~~ ~~200~~	~~800~~ ~~200~~	2000

حيث تحقق الحل الأولي لأنه تم نقل جميع وحدات العرض لتلبية وإشباع جميع الطلب.

6- نحسب التكلفة الكلية والتي هي:

$$\text{Min.}Z = (21)(200) + (42)(200) + (20)(300) + (21)(700) + (15)(600)$$

$$= 42300$$

نلاحظ هنا بأن إجمالي التكاليف باستخدام طريقة أقل التكاليف قد انخفض بمقدار (900) دينار عن إجمالي التكاليف بطريقة الركن الشمالي الغربي.

3- طريقة فوجل التقريبية:

تعتبر هذه الطريقة من أكثر الطرق المستخدمة أهمية لأنها تعطي حلاً أقرب إلى الحل الأمثل. فغالباً ما يكون الحل الأولي هو الحل الأمثل. وللوصول إلى الحل الأولي بهذه الطريقة نتبع الخطوات التالية:

أ- إيجاد كلفة الجزاء، وهي حاصل الفرق بين أقل كلفتين غير متساويتين في كل صف وفي كل عمود مع ملاحظة انه إذا توافق في أي عمود أو صف تكلفتين متساويتين لا يؤخذ الفرق بينهما.

ب- نختار أكبر جزاء من بين الصفوف والأعمدة وفي حالة تساوي أكثر من قيمة واحدة نختار واحدة منهما.

جـ- تحديد الخلية التي تحتوي على أقل كلفة في الصف أو العمود الذي تم اختياره في الخطوة السابقة ثم يتم مقارنة احتياجات مركز الاستلام المناظر لها مع الكمية المتوفرة في مركز التوزيع.

د- اختيار أصغر الكميتين في الخطوة السابقة وتوضع في الخلية المختارة ثم بعد ذلك يحذف الصف أو العمود المقابل لأصغر الكميتين.

هـ- إعادة الخطوات السابقة إلى أن يتم توزيع جميع الكميات المتوفرة في مراكز التوزيع على مراكز الاستلام.

ولتوضيح هذه الطريقة سنعمل على حل مشكلة نقل منشأة زيد السابقة والمجدولة كما يلي:

إلى / من	العقبة	الأزرق	الرمثا	عرض المصدر
عمان	31	21	42	400
الزرقاء	20	21	30	1000
اربد	23	20	15	600
طلب المراكز	300	900	800	2000

الحل:

أ- نجد كلفة الجزاء وذلك بحساب الفرق بين أقل تكلفتين غير متساويتين في كل صف وعمود كما يلي:

إلى / من	العقبة	الأزرق	الرمثا	كلفة الجزاء للصفوف
عمان	31	21	42	10
الزرقاء	20	21	30	1
اربد	23	20	15	5
كلفة الجزاء للأعمدة	3	1	(15)	

ب- نختار أكبر جزاء في الأعمدة والصفوف وهي (15).

جـ- نختار أصغر كلفة في عمود أو صف الجزاء.

في مثالنا هذا، فإن عمود الرمثا هو عمود الجزاء وأصغر تكلفة فيه تساوي (15) وهذه الخلية يجب ملئها أولاً كما في الخطوة التالية.

د- مقارنة احتياج مركز الاستلام مع الكمية المتوفرة في مركز التوزيع ونختار الأصغر وتوضع في الخلية المختارة ثم يحذف الصف أو العمود المقابل لأصغر الكميتين كما يظهر في الجدول التالي:

إلى / من	العقبة	الأزرق	الرمثا	
عمان	31	21	42	400
الزرقاء	20	21	30	1000
اربد	23	20	(600)	~~600~~
كلفة الجزاء للأعمدة	300	900	800	2000

هـ- إعادة الخطوات السابقة إلى أن يتم توزيع جميع كميات مراكز التوزيع على مراكز الاستلام.

ملاحظة:

إن إعادة الخطوات السابقة لا تتطلب عمل جدول خاص لكل خلية فكثرة الجداول قد تولد خطأ في عملية التوزيع لذلك يفضل استخدام الأسلوب التالي:

إلى / من	العقبة	الأزرق	الرمثا	عرض	كلفة جزاء الصفوف	كلفة جزاء الصفوف	كلفة جزاء الصفوف
عمان	31	21 / 400	42	400	10	10	10
الزرقاء	20 / 300	21 / 500	30 / 200	1000	1	1	1
اربد	23	20	15 / 600	600	5		
الطلب	300	900	800	2000			
كلفة جزاء الأعمدة	3	1	(15)				
كلفة جزاء الأعمدة	11	0	(12)				
كلفة جزاء الأعمدة	(11)	0					

ثم نحسب التكلفة الإجمالية لهذه المسألة وهي:

$$Min.Z = (21)(400) + (20)(300) + (21)(500) + (30)(200) + (15)(600)$$

$$= 39900$$

وعند مقارنة النتائج بين الطرق الثلاثة نجد أن طريقة فوجل قد حققت أقل التكاليف.

نلاحظ في هذه المشكلة أن مجموع قيم العرض مساوية لمجموع قيم الطلب أي أنها مشكلة نقل متوازنة. لكن في بعض الحالات قد تكون هذه القيم غير متساوية وبالتالي يكون النموذج غير متوازن، ولكي نوازنه نضيف إلى الطرف الأقل قيمة الفرق وبتكلفة موازية لها مساوية للصفر. فإذا كان العرض أكبر من الطلب فإننا نضيف إلى الجدول عمود آخر تكون فيه التكاليف مساوية للصفر، وإذا كان العكس، فإننا نضيف إلى الجدول صف آخر بتكاليف مساوية للصفر ثم نحل النموذج بأي طريقة من الطرق الثلاث السابقة.

اختيار أمثلية الحل الأولي:

إن الحصول على الحل الأساسي الأولي لا يعني نهاية المشكلة وإنما يجب أن تستخدم أساليب أخرى لاختيار هل الحل الأساسي الذي تم الحصول عليه من تطبيق إحدى الطرق السابقة هو الحل الأمثل؟ وهل هو الحل الوحيد الذي لا يمكن إيجاد حل أفضل منه أم أن هناك حلولاً أمثل منه؟

هناك طريقتان لاختبار أمثلية الحل هما:

أ- طريقة المسار المتعرج (التخطي).

ب- طريقة التوزيع المعدل (عوامل الضرب).

علماً بأن تحسين الحل بالطريقتين يتطلب أن تكون مشكلة النقل في الحل الأساسي الأولي مستوفاة للشرط التالي:

[عدد المتغيرات الأساسية (الخلايا المشغولة) = عدد الصفوف + (عدد الأعمدة - 1)].

وأما إذا لم يتحقق هذا التساوي فإن مشكلة النقل تكون حالة خاصة تسمى انحلال الحل.

أ- أمثلية الحل باستخدام طريقة المسار المتعرج (التخطي):

بالرجوع إلى جدول الحل الأساسي الأولي المقبول لمنشأة زيد باستخدام طريقة أقل التكاليف والذي ظهر كما يلي:

المراكز / المصادر	العقبة	الأزرق	الرمثا	عرض المصدر
عمان	31 ○	21 / 200	42 / 200	400
الزرقاء	20 / 300	21 / 700	30 ○	1000
اربد	23 ○	20 ○	15 / 600	600
طلب المراكز	300	900	800	2000

نلاحظ في هذا الجدول أن كثيراً من المسارات غير مستخدمة، وهذه الطريقة تقوم على أساس تقيم الفعالية الاقتصادية لهذه المسارات لإظهار تأثيرها في حال استخدامها أملاً في تحقيق الحل الأمثل. فإذا وجد أن ملء خلية فارغة سيؤدي إلى تقليل تكاليف النقل فإن جدول النقل يتم تعديله للاستفادة من ذلك.

خطوات تحسين الحل الأساسي الأولي بطريقة المسار المتعرج:

1- يتم رسم مسار مغلق يبدأ بالمتغيرات غير الأساسية (الخلايا غير المشغولة) يمر على عدد من المتغيرات الأساسية (الخلايا المشغولة) بحركة أفقية أو عامودية على أن لا يزيد عدد المتغيرات في كل اتجاه أفقي أو عامودي على متغيرين أساسيين.

2- يبدأ المسار المغلق بإشارة موجب (+) للمتغير غير الأساسي تعقبها إشارات سالب، موجب، سالب... أي تعطي إشارة (+)، (-) بالتعاقب للخلايا ابتداءً

من المتغير غير الأساسي المرسوم له المسار المغلق ولغاية آخر خلية في المسار بحيث تقع الخلايا المشغولة عند الزوايا القائمة للمسار المغلق. أما المتغيرات الأساسية الأخرى التي لا تمثل زوايا في المسار فإن قيمتها تبقى كما هي بدون تغيير.

3- احتساب دليل التحسين وذلك من خلال حاصل الفرق بين مجموع تكاليف المتغيرات ذات الإشارة الموجبة مطروحاً منها جميع التكاليف للمتغيرات ذات الإشارة السالبة في المسار الواحد. مع ملاحظة أنه إذا كانت التكلفة غير المباشرة لخلية ما بالسالب فإن ذلك يعني أن شغل تلك الخلية سيؤدي إلى خفض تكاليف النقل.

4- تكرار الخطوات (1-3) على جميع المتغيرات غير الأساسية (غير المشغولة).

5- التحقق من أمثلية الحل.

أ- إذا كانت كافة قيم التحسين موجبة أو صفرية فإن الحل يكون امثلاً، أي يجب أن تكون التكلفة غير المباشرة لكل خلية فارغة قيمة موجبة أو مساوية للصفر.

ب- إذا كانت هناك قيم سالبة فهذا يعني أن إمكانية تحسين الحل المتمثل في خفض التكاليف وارد شريطة اختيار أكبر قيمة سالبة لأنها تساهم بشكل أكبر في تحسين الحل. ففتح مسارات جديدة للنقل يتم على هذا الأساس.

مثال:

الجدول التالي يمثل جدول الحل الأولي بطريقة أقل التكاليف لمنشأة زيد.

المراكز / المصادر	العقبة	الأزرق	الرمثا	عرض المصدر
عمان	31 ○	21 200	42 200	400
الزرقاء	20 300	21 700	30 ○	1000
اربد	23 ○	20 ○	15 600	600
طلب المراكز	300	900	800	2000

المطلوب: إيجاد الحل الأمثل مستخدماً طريقة المسار المتعرج.

الحل:

إن تحسين الحل بطريقة المسار المتعرج أو بطريقة التوزيع المعدل يتطلب أن تكون مشكلة النقل في الحل الأولي مستوفية للشرط التالي:

[عدد المتغيرات الأساسية = عدد الصفوف + (عدد الأعمدة - 1)]

$$(1 - 3) + 3 = 5$$

$$2 + 3 = 5$$

$$5 = 5$$

وحيث أن هذه المشكلة قد استوفت هذا الشرط فيمكن الانتقال إلى مرحلة تحسين الحل.

نلاحظ في جدول الحل الأساسي وجود أربعة متغيرات غير أساسية (خلايا غير مشغولة) وبالتالي يمكن اعتماد أربعة مسارات جديدة هي:

❖ المسار الأول (عمان - العقبة).

	الأزرق	العقبة
عمان	21 / 200	31 / ○
الزرقاء	21 / 700	20 / 300

	الأزرق	العقبة
عمان	21 / 199	31 / +1
الزرقاء	21 / 701	20 / 299

وبالتالي فإن التأثير في التكاليف (دليل التحسين) يساوي:

$+31 - 20 + 21 - 21 = +11$

ومن قيمة التأثير في التكاليف هذه يتضح بان فتح مسار جديد بين عمان والعقبة يؤدي إلى زيادة التكاليف بمقدار (11) دينار عند نقل كل وحدة مما يجعل فتح هذا المسار غير اقتصادي.

❖ المسار الثاني (الزرقاء - الرمثا)

	الرمثا	الأزرق
عمان	42 / 200	21 / 200
الزرقاء	30 / ○	21 / 700

	الرمثا	الأزرق
عمان	42 / 199	21 / 201
الزرقاء	30 / +1	21 / 699

وبالتالي فإن التأثير في التكاليف (دليل التحسين) يساوي:

$+30 - 42 + 21 - 21 = -12$

يتضح من قيمة التأثير في التكاليف أن فتح مسار جديد بين الزرقاء والرمثا يؤدي إلى خفض التكاليف بمقدار (12) دينار عند نقل كل وحدة مما يجعل فتح هذا المسار اقتصادي.

❖ المسار الثالث (اربد - الأزرق)

	الرمثا	الأزرق
عمان	42 / 200	21 / 200
الزرقاء	30 / ○	21 / 700
اربد	15 / 600	20 / ○

	الرمثا	الأزرق
عمان	42 / 201	21 / 199
الزرقاء		
اربد	15 / 599	20 / +1

وبالتالي فإن التأثير في التكاليف (دليل التحسين) يساوي:

$+20 - 15 + 42 - 21 = +26$

أي أن فتح هذا المسار الجديد يؤدي إلى زيادة التكاليف بمقدار (26) دينار عند نقل كل وحدة مما يجعل فتح هذا المساء غير اقتصادي.

❖ المسار الرابع (اربد - العقبة)

	الرمثا	الأزرق	العقبة
عمان	42 / 200	21 / 200	
الزرقاء		21 / 700	20 / 300
اربد	15 / 600		23 / ○

	الرمثا	الأزرق	العقبة
عمان	42 / 201	21 / 199	
الزرقاء		21 / 701	20 / 299
اربد	15 / 599		23 / +1

وبناء عليه فإن التأثير في التكاليف (دليل التحسين) يساوي:

$+23 - 20 + 21 - 21 + 42 - 15 = +30$

أي أن فتح هذا المسار سيؤدي إلى زيادة التكاليف بمقدار (30) دينار عند نقل كل وحدة مما يجعل فتح هذا المسار غير اقتصادي.

وعند تفريغ دلائل التحسين للمسارات الأربعة في جدول الحل الأولي المقبول يظهر كما يلي:

المراكز / المصادر	العقبة	الأزرق	الرمثا	عرض المصدر
عمان	31 (+11)	21 200	42 200	400
الزرقاء	20 300	21 700	30 (-12)	1000
اربد	23 (+30)	20 (+26)	15 600	600
طلب المراكز	300	900	800	2000

نلاحظ وجود دليل تحسين واحد سالب فقط وهذا يعني أن شغل هذه الخلية سيؤدي إلى خفض التكاليف من خلال نقل (200) وحدة من الزرقاء إلى الرمثا ليبقى في الأزرق (500) ونقل (200) وحدة من الرمثا إلى الأزرق ليصبح في الأزرق (400). أي أن جدول الحل هو كما يلي:

المراكز / المصادر	العقبة	الأزرق	الرمثا	عرض المصدر
عمان	31 ○	21 400	42 ○	400
الزرقاء	20 300	21 500	30 200	1000
اربد	23 ○	20 ○	15 600	600
طلب المراكز	300	900	800	2000

ودالة الهدف تساوي:

$$Min.Z = (400)(21) + (300)(20) + (500)(21) + (200)(30) + (600)(15)$$

$$= 39900$$

وعند مقارنة هذه النتيجة مع تلك المتحققة جراء استخدام طريقة أقل التكاليف والتي كانت (42300) ديناراً، فإن تحسناً قد طرأ على التكاليف عند تحسين الحل مقداره (2400) دينار.

لكن السؤال الذي يثار هنا، هل هذا هو الحل الأمثل؟

الجواب: قد يكون هو الحل الأمثل وقد لا يكون، والإجابة الصريحة لهذا السؤال تكون من خلال إعادة الخطوات السابقة لاحتساب أدلة تحسين جديدة والتي ستظهر كما يلي:

- المسار الأول (عمان - العقبة).

ودليل التحسين يساوي:

$+31 - 20 + 21 - 21 = +11$

- المسار الثاني (عمان – الرمثا)

ودليل التحسين يساوي:

$+42 - 21 + 21 - 30 = +12$

- المسار الثالث (اربد – الأزرق)

دليل التحسين يساوي

$+20 - 21 + 30 - 15 = +14$

- المسار الرابع (اربد – العقبة)

دليل التحسين يساوي

$+23 - 20 + 30 - 15 = +18$

وحيث أن كافة قيم دلائل التحسين أكبر أو تساوي صفر، فإن دالة الهدف أعلاه تمثل الحل الأمثل.

ب- أمثلية الحل باستخدام طريقة التوزيع المعدل (عوامل الضرب):

إن هدف هذه الطريقة لا يختلف عن هدف طريقة المسار المتعرج والمتمثل في تقيم الفعالية الاقتصادية للمسارات غير المستخدمة لإظهار تأثيرها في حالة استخدامها أملاً في تحقيق الحل الأمثل. إلا أن ما يميز هذه الطريقة عن السابقة هو عدم الحاجة إلى رسم جميع المسارات المتعرجة مما ينتج عن ذلك اختصار في الجهد والوقت. ويتم إتباع الخطوات التالية لاستخدام هذه الطريقة:

1- التأكد من أن عدد المتغيرات الأساسية (الخلايا المشغولة) يساوي عدد الصفوف + (عدد الأعمدة – 1).

2- يتم تكوين عدة معادلات بواقع معادلة لكل خلية مشغولة في جدول الحل الأولي ويتم إعداد كل خلية على أساس العلاقة التالية:

$$Ui + Vj = Cij$$

حيث: Cij تمثل تكلفة كل خلية مشغولة تقع في الصف i والعمود j.

Ui: تمثل مركز العرض.

Vj: تمثل مركز الطلب.

3- نقوم بحل المعادلات في الخطوة الثانية بطريقة التعويض.

4- احتساب دليل التحسين eij (التكلفة غير المباشرة).

ويعني ذلك تقييم كل خلية مشغولة باستخدام المعادلة التالية:

$$eij = Cij - Ui - Vj$$

لتحديد مقدار التغير في التكاليف من جراء استخدام المسار غير المستخدم في الحل الأولي.

5- اختيار دليل التحسين ذا أعلى قيمة سالبة.

وهنا يجب رسم مسار مغلق كما في طريقة المسار المتعرج لتحديد المتغير الخارج وعدد الوحدات الواجب نقلها.

6- احتساب قيمة دالة الهدف لإظهار مدى التخفيف في التكاليف جراء إدخال متغير إلى الخلية غير المشغولة في الحل.

7- تحسين الحل.

ويتم ذلك بتكرار الخطوات من (2-6) على جميع المتغيرات غير الأساسية (غير المشغولة) لإظهار فيما إذا كان هناك إمكانية لتحسين الحل. فإذا كانت كافة دلائل التحسين موجبة فهذا يعني أن جدول الحل الأخير يمثل جدول الحل الأمثل.

نلاحظ أن الفرق بين طريقة المسار المتعرج وطريقة التوزيع المعدل هو في أسلوب الوصول إلى دلائل التحسين أما باقي الخطوات فهي متماثلة.

مثال:

بالرجوع إلى جدول الحل الأساسي الأولي لمنشأة زيد والمستخرج بطريقة أقل التكاليف والذي يظهر كما يلي:

المراكز / المصادر	العقبة	الأزرق	الرمثا	عرض المصدر
عمان	31 / ○	21 / 200	42 / 200	400
الزرقاء	20 / 300	21 / 700	30 / ○	1000
اربد	23 / ○	20 / ○	15 / 600	600
طلب المراكز	300	900	800	2000

المطلوب: تحسين الحل الأساسي الأولي بطريقة التوزيع المعدل حتى الوصول إلى الحل الأمثل.

الحل:

الخطوة الأولى:

إن تحسين الحل بطريقة التوزيع المعدل يتطلب أن تكون مشكلة النقل في الحل الأولي مستوفية للشرط التالي:

عدد المتغيرات الأساسية = عدد الصفوف + (عدد الأعمدة - 1)

$(1 - 3) + 3 = \quad 5$

$2 + 3 = \quad 5$

$5 = \quad 5$

وحيث أن مشكلة النقل قد استوفت هذا الشرط فيمكن الانتقال إلى الخطوة الثانية.

الخطوة الثانية:

تكوين معادلات بواقع معادلة لكل خلية مشغولة كما يلي:

$U_i + V_j = C_{ij}$

$U_1 + V_2 = 21$ .... (1)

$U_1 + V_3 = 42$ .... (2)

$U_2 + V_1 = 20$ .... (3)

$U_2 + V_2 = 21$ .... (4)

$U_3 + V_3 = 15$ .... (5)

الخطوة الثالثة:

حل المعادلات أعلاه بطريقة التعويض.

بما أن عدد الأعمدة والصفوف في هذه المشكلة يساوي ستة، فهذا يعني وجود ستة مجاهيل هي $U_1, U_2, U_3, V_1, V_2, V_3$.

في حين أن عدد المعدلات يساوي خمسة فقط، لذلك نعتبر قيمة أحد المجاهيل مساوياً للصفر وعادة يكون المتغير الأول U_1.

$U_1 + V_2 = 21$ .... (1)

$U_1 = 0$

$V_2 = 21$

$U_1 + V_3 = 42$ .... (2)

$U_1 = 0$

$V_3 = 42$

$U_2 + V_2 = 21$ .... (4)

$U_2 + 21 = 21$

$U_2 = 0$

$U_2 + V_1 = 20$ .... (3)

$0 + V_1 = 20$

$V_1 = 20$

$U_3 + V_3 = 15$ .... (5)

$U_3 + 42 = 15$

$U_3 = -27$

الخطوة الرابعة:

احتساب دليل التحسين من خلال المعادلة:

$$eij = Cij - Ui - Vj$$

وحيث أن لدينا أربعة مسارات غير مستخدمة في الحل الأولي هي:

1- عمان - العقبة.

$$e_{11} = C_{11} - U_1 - V_1$$

$$30 - 0 - 20 = +11$$

2- الزرقاء - الرمثا.

$$e_{23} = C_{23} - U_2 - V_3$$

$$30 - 0 - 42 = -12$$

3- إربد - الأزرق

$$e_{32} = C_{32} - U_3 - V_2$$

$$20 - (-27) + 21 = +26$$

4- إربد - العقبة

$$e_{31} = C_{31} - U_3 - V_1$$

$$23 - (-27) - 20 = +30$$

وبمقارنة دلائل التحسين هذه مع ما سبق الحصول عليه عند تقييم جدول الحل الأولي باستخدام طريقة المسار المتعرج يتضح لنا تطابق النتائج في الطريقتين ثم نتابع الحل كما في طريقة المسار المتعرج حتى الوصول إلى الحل الأمثل.

أسئلة الوحدة الخامسة

س1: إليك مشكلة النقل التالية في صيغتها الجدولية.

المراكز / المصادر	X	Y	Z	عرض
A	8	12	3	20
B	10	6	11	15
C	1	4	8	10
D	7	11	5	25
الطلب	30	25	15	70

المطلوب:

أ- إيجاد الحل الأولي الممكن مستخدماً طريقة الركن الشمالي الغربي.

ب- إيجاد التكلفة الإجمالية لهذه المشكلة.

س2: الجدول التالي يبين تكلفة نقل الوحدة الواحدة من سلعة معينة من أربع مصادر إلى أربع مراكز طلب، وكذلك يبين إمكانيات المصادر واحتياجات المراكز.

المراكز / المصادر	D_1	D_2	D_3	D_4	عرض
S_1	2	3	7	11	150
S_2	0	12	5	6	125
S_3	14	1	3	9	75
S_4	10	2	5	8	50
الطلب	100	20	80	200	400

المطلوب: 1- إيجاد الحل الأولي باستخدام الطرق الثلاثة.

2- إيجاد التكاليف الإجمالية حسب كل طريقة والمقارنة بينهم.

س3: الجدول التالي يمثل مصفوفة التكاليف من المصادر إلى مراكز التوزيع وكذلك يبين إمكانيات المصادر واحتياجات المراكز.

المراكز / المصادر	D1	D2	D3	عرض
S_1	2	4	0	150
S_2	3	1	5	200
S_3	6	2	4	325
S_4	9	7	1	25
الطلب	180	320	200	700

المطلوب: 1- إيجاد الحل الأولي الممكن مستخدماً طريقة فوجل التقريبية.

2 - اختبر الحل إن كان أمثلاً بطريقة المسار المتعرج وطوره للوصول للحل الأمثل إذا لم يكن كذلك.

س4: المصفوفة التالية تمثل مصفوفة التكلفة لمسألة نقل ومبين عليها إمكانيات المصادر واحتياجات المراكز.

المراكز / المصادر	D_1	D_2	D_3	D_4	عرض
S_1	3	2	7	6	5000
S_2	7	5	2	3	6000
S_3	2	5	4	5	2500
الطلب	6000	4000	2000	1500	13500

المطلوب:

1- إيجاد الحل الأولي باستخدام طريقة أقل التكاليف.

2- إيجاد الحل الأمثل باستخدام طريقة التوزيع المعدل.

س5: فيما يلي جدول الحل الأولي بطريقة الزاوية الشمالية الغربية

المراكز / المصادر	D_1	D_2	D_3	العرض
S_1	9 (5)	3 (1)	○ (8)	12
S_2	○ (2)	7 (4)	7 (0)	14
S_3	○ (3)	○ (6)	4 (7)	4
الطلب	9	10	11	30

المطلوب: إيجاد الحل الأمثل باستخدام طريقة المسار المتعرج.

الوحدة السادسة

مشكلة التعيين أو التخصيص

The Assignment Problem

مقدمة:

تعتبر مشكلة التخصيص إحدى الحالات الخاصة لمشكلة النقل إلا أنها تختلف عن مشكلة النقل بأن عملية التخصيص تتم على أساس تخصيص عامل واحد لعمل واحدٍ أو بائع واحد لمنطقة جغرافية واحدة...الخ أي أن هذه المشكلة تدور حول تخصيص عدد معين من العمال إلى نفس العدد من الأعمال أو عدد معين من الباعة إلى نفس العدد من المناطق أو عدد معين من الآلات إلى نفس العدد من السلع... الخ وذلك بالشكل الذي يؤدي إلى التخصيص الأمثل والذي من شأنه أن يحقق أدنى التكاليف أو أعلى الأرباح.

وحيث أن مشكلة التخصيص تتم على أساس عامل واحدٌ لعمل واحد أو جهاز واحد لوظيفة واحدة ... الخ لذلك يُعبر عن مشكلة التخصيص بمصفوفة مربعة (عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة) حيث:

أ- الصفوف تمثل الوسائل (العمال، الأجهزة، ... الخ).

ب- الأعمدة تمثل المهام (الوظائف الواجب تحقيقها).

جـ- الأرقام التي تمثل نقاط التقاء الصف مع العمود تمثل التكاليف.

لذلك فإن مشكلة التخصيص تتميز بالخصائص التالية:

1- أن عدد الوسائل يساوي عدد المهام.

2- تخصيص كل وسيلة لمهمة واحدة فقط.

3- تكون التكاليف محددة مسبقاً لهذا فإن مصفوفة مشكلة التخصيص تسمى مصفوفة التكاليف.

4- تعتمد عملية التخصيص الأعداد الصحيحة.

طرق التخصيص Assignment Methods:

هناك مجموعة من الطرق يمكن استخدامها في حل مسائل التخصيص منها:

أ- طريقة البرمجة الخطية.

ب- طريقة النقل.

جـ- طريقة العدد الكامل (التوافيق).

د- الطريقة الهنجارية.

وبحثنا هنا سيقتصر على طريقة العدد الكامل والهنجارية فقط.

1- طريقة العدد الكامل (التوافيق):

تعتبر هذه الطريقة من أبسط الطرق المستخدمة في حل مشاكل التخصيص وتعتمد على عدد المرات التي يمكن بها التوافق بين البدائل. حيث عدد البدائل المحتملة لكل مشكلة تخصيص تساوي مضروب عدد الصفوف أو عدد الأعمدة، فإذا كان عدد الصفوف أو الأعمدة يساوي ثلاث مثلاً، فإن عدد البدائل المحتملة لعملية التخصيص تساوي 3 × 2 × 1 = 6 بدائل

آلية عمل طريقة العدد الكامل:

إن آلية عمل هذه الطريقة تتطلب القيام بالخطوات التالية:

1- استخراج عدد البدائل المحتملة لعملية التخصيص.

2- تسجيل جميع احتمالات التخصيص مع التكاليف المقابلة لكل احتمال.

3- اختيار البديل الأمثل.

فلو كان لدينا مصفوفة التكاليف التالية:

المهام "إدارة مشاريع" / الوسائل "مدراء"	المشاريع		
	A	B	C
علي	9	13	7
عمر	14	14	6
عمران	10	13	8

والذي يُشير إلى وجود ثلاثة مدراء بمهارات مختلفة لإدارة هذه المشاريع والتكاليف المقدرة من جراء توزيع هؤلاء المدار على المشاريع. وطلب منا تحديد أفضل تعيين يحقق أقل تكاليف باستخدام طريقة العدد الكامل فإن خطوات الوصول إلى هذا الهدف هي:

1- تحديد عدد البدائل المحتملة لعملية التخصيص وهي تساوي

!3 = 3 × 2 × 1 = 6بدائل

2- تسجيل جميع احتمالات التخصيص مع التكاليف المقابلة لكل احتمال كما في الجدول التالي:

البدائل	A	B	C	كلفة العمل	إجمالي التكاليف
1	علي	عمر	عمران	19+ 14 + 8	31
2	علي	غمران	عمر	9 +13 + 6	28
3	غمر	علي	عمران	14 13 + 8	35
4	عمر	عمران	علي	14 + 13 +7	34
5	عمران	علي	عمر	10 + 13 + 6	29
6	عمران	عمر	علي	10 + 14 +7	31

نلاحظ من هذا الجدول بان عملية التخصيص الأمثل الذي يساعد الشركة في تخفيض التكاليف إلى أقل ما يمكن يتم من خلال تخصيص المدير علي على المشروع (A) والمدير عمران على المشروع (B) والمدير عمر على المشروع (C) لان هذا التخصيص يحقق أقل تكاليف وهي (28) ديناراً.

مثال:

شركة ترغب في تعيين ثلاث عمال لإنجاز ثلاث وظائف، فإذا كانت الأرباح الناجمة عن القيام بهذه الوظائف مبينة في الجدول التالي:

المهام "إدارة مشاريع" / الوسائل "مدراء"	المشاريع		
	A	B	C
X	6	15	4
Y	9	7	6
Z	7	1	11

المطلوب: استخدام طريقة العد الكامل لتحديد أفضل تعيين يحقق أعظم ربح ممكن.

الحل:

1- عدد البدائل المحتملة لعملية التخصيص هي:

$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ بدائل

2- إن جميع احتمالات التخصيص مع التكاليف المقابلة لكل احتمال هي:

البدائل	A	B	C	كلفة العمل	إجمالي التكاليف
1	x	y	Z	6+ 7 + 11	24
2	x	Z	y	6 + 1 + 6	13
3	y	x	Z	9 + 15 + 11	35
4	y	Z	x	9 + 1 + 11	21
5	Z	x	y	7 + 15 + 6	28
6	Z	y	x	7 + 7 + 4	18

نلاحظ من هذا الجدول بأن عملية التخصيص الأمثل الذي يساعد الشركة في تحقيق أعظم ربح ممكن هو عندما ينجز العامل (X) الوظيفة (B) والعامل (Y) الوظيفة (A) والعامل (Z) الوظيفة (C)، ويكون إجمالي الربح الناتج عن هذا التعيين هو 35.

2- الطريقة الهنجارية:

إن من أبرز عيوب طريقة الحد الكامل أنها تستخدم فقط لإيجاد الحل الأمثل في حالة المسائل ذات المتغيرات قليلة العدد فتصبح غير كفوءة في حالة المسائل الكبيرة ذات المتغيرات الأربعة وما فوق. لهذا السبب تم تطوير أسلوب يُعد أكثر كفاءة في إيجاد الحل الأمثل على يد الرياضي المجري د. كوينج الذي بنى نموذجها وعرفت بالطريقة الهنجارية والتي تتميز بقدرتها على التعامل مع المشاكل ذات المتغيرات الكثيرة ودون الحاجة إلى إجراء مقارنات للبدائل المتاحة لاختيار البديل الأمثل الذي يحقق الحل الأمثل.

❖ **خطوات الوصول إلى الحل الأمثل بالطريقة الهنجارية في حالة تخفيض التكاليف:**

1- يُحدد أصغر رقم في كل سطر من أسطر جدول كلفة التخصيص ويطرح من كافة الأرقام في نفس السطر وتوضح النتائج في جدول جديد يسمى جدول الكلفة المعدل رقم (1) أو مصفوفة المراجعة المبدئية.

2- يُحدد أصغر رقم في كل عمود من أعمدة جدول الكلفة المعدل رقم (1) ويطرح من كافة الأرقام في نفس العمود توضح النتائج في جدول جديد آخر يسمى جدول الكلفة المعدل رقم (2) أو مصفوفة تكلفة الفرصة الكلية.

3- نقوم باختبار مثالية الحل لجدول الكلفة المعدل رقم (2) وذلك بتغطية جميع الأصفار في جدول الكلفة المعدل رقم (2) بأقل عدد من الخطوط المستقيمة لكل من الصفوف والأعمدة مع ملاحظة أنه لا يجوز تغطية جميع الأصفار من خلال رسم الخطوط على الصفوف فقط أو الأعمدة فقط، فإذا:

أ- كان عدد هذه الخطوط المستقيمة مساوياً لعدد الصفوف أو الأعمدة في جدول الكلفة المعدل رقم (2) نكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل الأمر الذي يتطلب القيام بعملية التخصيص وذلك باختيار الصف أو العمود الذي يحتوي على قيمة صفرية واحدة وتخصيصة ثم نختصر المصفوفة بشطب صف وعمود القيمة الصفرية ثم نكرر هذا المبدأ على المصفوفة المختصرة وهكذا حتى الانتهاء من عملية التخصيص ثم نأخذ القيم الأصلية المناظرة للأصفار التي خصصت من جدول كلفة التخصيص الأصلي.

ب- إذا كان عدد الخطوط المستقيمة أقل من عدد الصفوف أو الأعمدة في جدول الكلفة المعدل رقم (2) فإن هذا يعني عدم التوصل إلى التخصيص الأمثل، الأمر الذي يتطلب زيادة عدد القيم الصفرية في المصفوفة ويتم ذلك باختيار أقل قيمة غير مغطاة في جدول الكلفة المعدل رقم (2) وطرحها من جميع القيم غير المغطاة ثم إضافتها إلى نقاط تقاطع الخطوط المستقيمة المغطية للقيم الصفرية. وفي حالة عدم الوصول إلى الحل الأمثل تعاد هذه الطريقة إلى أن يصبح عدد الخطوط المستقيمة مساوية لعدد الصفوف أو الأعمدة فنكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل ثم نتابع بنفس طريقة الخطوة الثالثة السابقة فرع (أ).

مثال:

مصنع فيه ثلاثة ماكنات، يراد استخدام عامل واحد لكل ماكنة فإذا قدرت إدارة المصنع تكاليف تشغيل العمال على هذه المكائن كما يلي:

ماكنة / عمال	A	B	C
عمر	14	30	6
عماد	10	20	16
عمران	6	22	18

المطلوب: استخدام الطريقة الهنجارية لإيجاد أفضل تخصيص يحقق أقل تكلفة.

الحل:

1- نطرح أصغر رقم في كل سطر من أسطر جدول كلفة التخصيص للحصول على جدول الكلفة المعدل رقم (1) والذي سيظهر كما يلي:

ماكنة / عمال	A	B	C
عمر	8	24	0
عماد	0	10	6
عمران	0	16	12

2- نطرح أصغر رقم في كل عمود من كافة الأرقام في نفس العمود في جدول الكلفة المعدل رقم (1) للحصول على جدول الكلفة المعدل رقم (2) والذي سيظهر كما يلي:

ماكنة / عمال	A	B	C
عمر	8	14	0
عماد	0	0	6
عمران	0	6	12

3- نقوم باختبار مثالية الحل لجدول الكلفة المعدل رقم (2) وذلك بتغطية جميع الأصفار الواردة فيه بأقل عدد من الخطوط المستقيمة لكل من الصفوف والأعمدة كما يلي:

ماكنة / عمال	A	B	C	
عمر	8	14	0	1
عماد	0	0	6	2
عمران	0	6	12	
	3			

وحيث أن عدد الخطوط المستقيمة التي غطت كافة الأصفار تساوي ثلاثة خطوط وهي بالمقابل مساوية لعدد الصفوف أو الأعمدة فإن هذا يعني إننا قد توصلنا إلى الحل الأمثل الذي يتطلب القيام بعملية التخصيص من خلال اختيار الصف أو العمود الذي يحتوى على قيمة صفرية واحدة لتخصيصه ثم تختصر المصفوفة.

❖ الصف الأول يحتوي على صفر واحد وهذا يعني تعيين العامل عمر على الماكينة C وبعد اختصار المصفوفة تصبح:

ماكنة / عمال	A	B
عماد	0	0
عمران	0	6

❖ الصف الثاني يحتوي على صفر واحد وهذا يعني تعيين العامل عمران على الماكينة A، وبعد اختصار المصفوفة يعين العامل الثالث عماد على الماكينة B.وبالتالي فإن أقل تكلفة ناجمة عن هذا التخصيص هو:

$$6+6+20=32$$

❖ خطوات الوصول إلى الحل الأمثل بالطريقة الهنجارية في حالة تعظيم الأرباح:

قد يكون هدف مشكلة التخصيص هو تعظيم الأرباح أو الحصول على أعلى مستوى من كفاءة الإنجاز بدلاً من تخفيض التكاليف إلى أدنى مستوى، وفي مثل هذه الحالة فإن مشكلة التخصيص المعبر عنها بمصفوفة تمثل المصفوفة الأولية للأرباح وليس للتكاليف، ولحل مشكلة التخصيص من هذا النوع علينا اتباع الخطوات التالية:

1-تحويل المصفوفة الأولية للأرباح إلى مصفوفة تكاليف وذلك باختيار أكبر قيمة في مصفوفة الأرباح ثم طرحها من كافة القيم الواردة فيها وأخذ القيمة المطلقة لناتج الطرح.

2- إجراء نفس خطوات الحل المتبعة في حالة التصغير للوصول إلى مصفوفة يمكن تغطية كافة أصفارها بعدد من الخطوط المستقيمة مساوياً لعدد الصفوف أو الأعمدة في جدول ربح التخصيص فنكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل.

مثال:

مؤسسة تجارية لديها أربع رجال بيع يراد توزيعهم على أربعة مناطق مختلف فإذا كان تقدير إدارة المؤسسة للأرباح اليومية المتوقعة لكل رجل بيع في كل منطقة بعد دراسة قدراتهم وطبيعة المناطق هو كما في الجدول التالي:

المناطق / رجل البيع	W	X	Y	Z
A	16	10	14	11
B	14	11	15	15
C	15	15	13	12
D	13	12	14	15

المطلوب: إيجاد التخصيص الأمثل لرجال البيع على المناطق المختلفة وأقصى ربح يمكن تحقيقه من هذا التخصيص.

الحل:

1- حيث أن مشكلة التخصيص هو تعظيم الأرباح لذلك يجب تحويل المصفوفة الأولية للأرباح إلى مصفوفة تكاليف وذلك بطرح أكبر قيمة فيها من كافة القيم والتي هي (16) وبالتالي الحصول على المصفوفة الأولية للتكاليف والتي هي كما يلي:

المناطق / رجل البيع	W	X	Y	Z
A	0	6	2	5
B	2	5	1	1
C	1	1	3	4
D	3	4	2	1

2- تحديد أصغر رقم في كل سطر ويطرح من كافة الأرقام في نفس السطر للحصول على جدول الكلفة المعدل رقم (1) التالي:

المناطق / رجل البيع	W	X	Y	Z
A	0	6	2	5
B	1	4	0	0
C	0	0	2	3
D	2	3	1	0

وحيث أن كافة السطور والأعمدة في جدول الكلفة المعدل رقم (1) يشتمل على أصفار فلا داعي لطرح أصغر رقم في كل عمود من كافة الأرقام في نفس العمود وعلينا فقط القيام بعملية التخصيص الأمثل كما يلي:

أ- الصف الأول يحتوي على صفر واحد وبالتالي توزيع رجل البيع A للمنطقة W.

ب- الصف الرابع يحتوي أيضاً على صفر واحد وبالتالي توزيع رجل البيع D للمنطقة Z.

جـ-توزيع رجل البيع C للمنطقة X.

د-توزيع رجل البيع B للمنطقة Y.

وعليه فإن أقصى ربح يمكن تحقيقه من هذا التخصيص هو:

$$16 + 15 + 15 + 15 = 61$$

مشاكل التخصيص غير المتوازنة:

لقد ذكرنا في بداية هذه الوحدة أن من بين الخصائص التي تتميز بها مشاكل التخصيص هو ضرورة تساوي عدد الوسائل مع عدد المهام. إلاّ أن هذا الشرط قد لا يتحقق في الحياة العملية وللتغلب على هذه المشكلة يتم استحداث صف أو أكثر وهمي إذا كان عدد الوسائل أقل من عدد المهام أو استحداث عمود أو أكثر وهمي إذا كان عدد الوسائل يفوق عدد المهام لموازنة مصفوفة التخصيص مع إعطاء هذا الصف أو العمود تكاليف أو أرباح تساوي صفراً وبالتالي فإن إجمالي التكاليف أو الأرباح في الحل الأمثل لن يتأثر.

أ- استخدام الطريقة الهنجارية لإيجاد التخصيص الأمثل في حالة إضافة صف وهمي.

إن خطوات حل مشاكل التخصيص المضاف إليها صف وهمي في حالة تخفيض التكاليف لا تختلف عن خطوات حل مشاكل التخصيص المتوازنة إلاّ في الخطوة الثانية التي لا يستوجب إجراءها والتي تتطلب تحديد أصغر رقم في كل عمود من أعمدة جدول الكلفة المعدل رقم (1)لطرحه من كافة الأرقام في نفس العمود للوصول إلى جدول الكلفة المعدل رقم (2) وذلك لأن أصغر رقم في كل عمود الواجب طرحه من كافة قيم العمود تساوي صفر.

مثال:

تنوي شركة مقاولات إنشاء أربعة مشاريع إسكانية في أربعة مناطق مختلفة، فإذا كان لدى الشركة ثلاث جرافات لحفر وتسوية هذه الأراضي، فإذا كان تقدير الشركة لتكاليف إنجاز هذه المهام بآلاف الدنانير هي كما في الجدول التالي:

المشاريع / الجرافات	المدينة (1)	المدينة (2)	المدينة (3)	المدينة (4)
A	9	12	8	11
B	16	5	18	9
C	7	4	9	20

المطلوب: إيجاد أفضل تخصيص يحقق أقل تكاليف.

الحل:

نلاحظ في هذا المثال بأن عدد الوسائل (الجرافات) أقل من المهام (الحفر) وهذا يعني ضرورة استحداث صف وهمي لموازنة مشكلة التخصيص كما يلي:

المشاريع / الجرافات	المدينة (1)	المدينة (2)	المدينة (3)	المدينة (4)
A	9	12	8	11
B	16	5	18	9
C	7	4	9	20
D	0	0	0	0

1- طرح أصغر رقم في كل سطر من كافة الأرقام في نفس السطر للوصول إلى جدول الكلفة المعدل رقم (1) التالي:

المشاريع / الجرافات	المدينة (1)	المدينة (2)	المدينة (3)	المدينة (4)
A	1	4	0	3
B	11	0	13	4
C	3	0	5	16
D	0	0	0	0

2- لا يتم طرح أقل قيمة في كل عمود لأنها تساوي صفر.

3- اختيار مثالية الحل بتغطية جميع الأصفار بأقل عدد من الخطوط المستقيمة.

المشاريع / الجرافات	المدينة (1)	المدينة (2)	المدينة (3)	المدينة (4)	
A	1	4	0	3	(1)
B	11	0	13	4	
C	3	0	5	16	
D	0	0	0	0	(3)
		(2)			

4- حيث أن عدد الخطوط المستقيمة أقل من عدد الصفوف أو الأعمدة فإن هذا يعني عدم التوصل إلى الحل الأمثل الأمر الذي يتطلب زيادة عدد القيم الصفرية بالطرق التي تعلمناها سابقاً والذي سيتولد عنها الجدول التالي:

المشاريع / الجرافات	المدينة (1)	المدينة (2)	المدينة (3)	المدينة (4)	
A	1	7	0	3	(1)
B	8	0	10	1	
C	0	0	2	13	(3)
D	0	3	0	0	(4)
		(2)			

5- حيث أن عدد الخطوط المستقيمة التي غطت كافة الأصفار تساوي أربعة خطوط وهي مساوية لعدد الصفوف أو الأعمدة فهذا يعني إننا توصلنا إلى الحل الأمثل.

6- التخصيص:

- الجرافة A تخصص لحفر وتسوية مشروع المدينة (3).
- الجرافة B تخصص لحفر وتسوية مشروع المدينة (2).
- الجرافة C تخصص لحفر وتسوية مشروع المدينة (1).

7- أقل تكاليف من جراء هذا التخصيص هو:

$$8 + 5 + 7 = 20$$

ب- استخدام الطريقة الهنجارية لإيجاد التخصيص الأمثل في حالة إضافة عمود وهمي.

إن خطوات حل مشاكل التخصيص المضاف إليها عمود وهمي في حالة تخفيض التكاليف لا تختلف عن خطوات حل مشاكل التخصيص المتوازنة إلا في الخطوة الأولى التي لا يستوجب إجراءها والتي تتطلب تحديد أصغر رقم في كل صف من صفوف جدول كلفة التخصيص لطرحه من كافة الأرقام في نفس الصف للوصول إلى جدول الكلفة المعدل رقم (1) وذلك لأن أصغر رقم في كل صف يساوي صفر.

مثال:

الجدول التالي يظهر كلفة تخصيص أربعة وسائل للقيام بثلاث مهام.

مهام / وسائل	W	X	Y
A	9	13	7
B	14	14	6
C	10	13	8
D	8	13	9

المطلوب: إيجاد التخصيص الأمثل الذي يحقق أقل تكاليف:

الحل:

1- إضافة عمود وهمي لتحقيق التوازن كما يلي:

مهام / وسائل	W	Z	Y	Z
A	9	13	7	0
B	14	14	6	0
C	10	13	8	0
D	8	13	9	0

2- تحديد أصغر رقم في كل عمود وطرحه من كافة الأرقام في نفس العمود كما يلي:

مهام / وسائل	W	Z	Y	Z	
A	1	0	1	0	
B	6	1	0	0	(1)
C	2	0	2	0	
D	0	0	3	0	(2)
		(4)		(3)	

3- التخصيص:

- الوسيلة A لإنجاز المهمة X.
- الوسيلة B لإنجاز المهمة y.
- الوسيلة D لإنجاز المهمة W

4- أقل تكاليف من جراء هذا التخصيص هو:

$$13 + 6 + 8 = 27$$

أسئلة الوحدة السادسة

س1: أوجد الحل الأمثل لمشكلة التخصيص التالية بطريقة العد الكامل.

مهام / وسائل	A	B	C	D
1	32	18	32	26
2	22	24	12	16
3	24	30	26	24
4	26	30	28	20

أ- لتخفيض التكاليف.

ب- لتعظيم الأرباح.

س2: الجدول التالي يظهر تكاليف إنجاز ثلاثة وظائف على ثلاثة آلات.

وظائف / آلات	X	Y	Z
A	21	17	31
B	17	19	35
C	20	21	27

المطلوب: استخدام طريقة العد الكامل وإجراء عملية التخصيص لتخفيض إجمالي التكاليف.

س3: أوجد الحل الأمثل لمشكلة التخصيص التالية بالطريقة الهنجارية.

مهام / وسائل	A	B	C	D
W	14	10	20	25
X	25	27	17	22
Y	18	12	21	42
Z	20	15	30	35

أ- لتخفيض التكاليف.

ب- لتعظيم الأرباح.

س4: ينوي مستثمر استئجار أربعة مخازن في أحد المراكز التجارية وكان أمامه خمسة مشاريع استثمارية، فإذا كانت مصفوفة الربحية كما يلي:

	مخزن (1)	مخزن (2)	مخزن (3)	مخزن (4)
المشروع (1)	10	6	12	8
المشروع (2)	15	18	5	11
المشروع (3)	17	10	13	16
المشروع (4)	14	12	13	10
المشروع (5)	14	16	6	12

المطلوب: مساعدة هذا المستثمر في اختيار أفضل أربعة مشاريع موزعين على المخازن الأربعة مستخدماً الطريقة الهنجارية.

الوحدة السابعة

شبكات الأعمال

Network Models

مقدمة :

نعلم أن العملية الإدارية تتشكل من مجموع الوظائف الإدارية التي تبدأ بالتخطيط ثم التنظيم ثم التوجيه ثم الرقابة. وترتبط هذه الوظائف ببعضها البعض ارتباطا وثيقا وبشكل تكاملي، إلا أن وظيفة الرقابة ترتبط بشكل رئيسي بعملية التخطيط لأن الوظيفة الرقابية تهدف إلى قياس ما تم إنجازه ومقارنته مع ما حددته الخطة من أهداف للتأكد من أن هذه الأهداف قد تحققت بجميع المواصفات الموضوعة وفقا لتسلسلها الزمني. وللرقابة أساليب ووسائل متعددة منها التقليدي كاستخدام الموازنات بأنواعها والنسب المالية، ومنها التخصصي كخارطة التعادل وخرائط جانت والأساليب الشبكية مثل طريقة المسار الحرج وطريقة بيرت اللتان تعدان من أهم الأساليب الحديثة في عملية التخطيط والرقابة وخاصة في المشاريع الكبيرة والتي يمكن تمثيلها بالرسم كمجموعة من الأنشطة المتكاملة والمتابعة وغير المتداخلة زمنيا الواجب إنجازها من أجل تحقيق هدف محدد مسبقا.فمبدأ شبكة الأعمال قائم على أساس أن أي مشروع يجب تقسيمه إلى عدد من مراحل التنفيذ (أنشطة) المتابعة زمنيا وفق تسلسل منطقي وبحيث ينتهي كل نشاط بحدث (Event). أي أن الأحداث في شبكة الأعمال والتي يُعبر عنها بدوائر تحدد نقاط تعاقب الأنشطة السابقة واللاحقة. فالدائرة تمثل نهاية زمن تنفيذ نشاط وبداية تنفيذ نشاط آخر باستثناء حدث البدء في المشروع الذي لا نشاط سابق له وحدث الانتهاء من العمل في المشروع حيث لا نشاط لاحق له. أما الأنشطة فهي فترة القيام الفعلي بالنشاط أي الوقت اللازم لإنجاز العمل الفعلي، ويشار لها بأسهم تربط بين الأحداث مبتدئة من حدث البداية وتنتهي عند حدث النهاية مروراً بالأحداث المختلفة المتابعة وغير المتداخلة التي يتطلبها إنجاز المشروع.أي أنه بين كل حدثين يوجد نشاط واحد فقط، ويرصد الزمن الذي يستغرقه النشاط لإنجاز الحدث فوق السهم الدال

على هذا النشاط، وبالتالي يمكن تعريف شبكة الأعمال بأنها نموذج شكلي يوضح العلاقة بين الأحداث والأنشطة التي تربط بينهما في تتابع منطقي وذلك لتقدير الزمن اللازم لإنجاز كافة مراحل المشروع أو أي مرحلة منه من أجل تخفيض وقت التنفيذ الكلي له من خلال التركيز على تحسين الأداء في أنشطة المسارات الحرجة في الشبكات.

قواعد وأسس بناء شبكات الأعمال:

إن عملية رسم شبكة الأعمال تتطلب في البداية تجزئة المشروع إلى مجموعة من المراحل (الأنشطة) وتحديد التسلسل المنطقي والزمني لإنجاز هذه الأنشطة وفقاً للقواعد والأسس التالية:

1- تبدأ شبكة الأعمال بحدث واحد فقط هو حدث البداية الذي لا نشاط سابق له.

2- تنتهي شبكة الأعمال بحدث واحد فقط هو حدث النهاية الذي لا نشاط لاحق له.

3- يُمثل كل نشاط بسهم واحد فقط ويُشير رأس السهم إلى اتجاه إنسياب العمل وغالباً ما يكون النشاط واقع بين حدثين كما يلي:

(1) ——A——> (2)

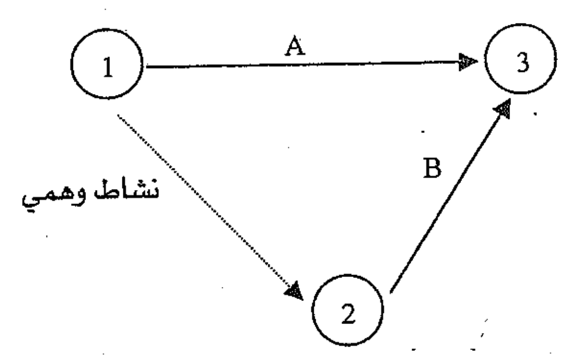
فالنشاط A واقع بين الحدثين 1 و 2.

4- لا يجوز ربط حدثين بأكثر من نشاط واحد كما يلي:

(1) ——A——> (2)
(1) ——B——> (2)

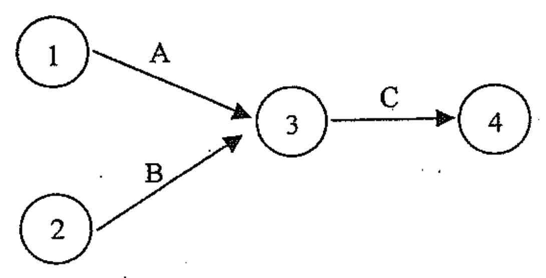
وذلك لأن انتهاء النشاطين A, B المبتدئين من حدث البداية عند حدث واحد يخالف قواعد بناء شبكات الأعمال التي تفترض وقوع كل نشاط بين

حدثين مستقلين وإن تتطلب الأمر إنجازهما في نفس الوقت مع اختلاف الزمن الذي يستغرقه كل نشاط، ولعلاج مثل هذه الحالة يتم استحداث نشاط وهمي على شكل سهم متقطع لا يخصص له وقت ولا إمكانات مادية لتميزه عن الأنشطة الحقيقية كما يلي:



والهدف من ذلك هو لتحقيق التتابع المنطقي في تسلسل تنفيذ الأحداث ولغرض الالتزام بالقواعد الأساسية في رسم شبكات الأعمال، فالنشاط A أصبح مساره (1-3) والنشاط B أصبح مساره (2-3).

5- لا يجوز البدء بنشاط جديد إلاّ بعد التأكد بأن جميع الأنشطة السابقة للنشاط المعني قد تم إنجازها.



ففي هذه الشبكة لا يمكن البدء بالنشاط C إلاّ بعد إنجاز النشاطين B, A مع ملاحظة أن النشاطين B, A قد بدأ معاً وإن طول السهم الممثل لأي نشاط ليس له أية دلالة.

مثال:

إذا تطلب إنجاز مهمة معينة ثمانية أنشطة مختلفة هي (A, B, C, D, E, F, G, H) وأن الترتيب المنطقي للأنشطة هي كما يلي:

1- النشاط B يلي النشاط A والنشاط C يلي النشاط B.

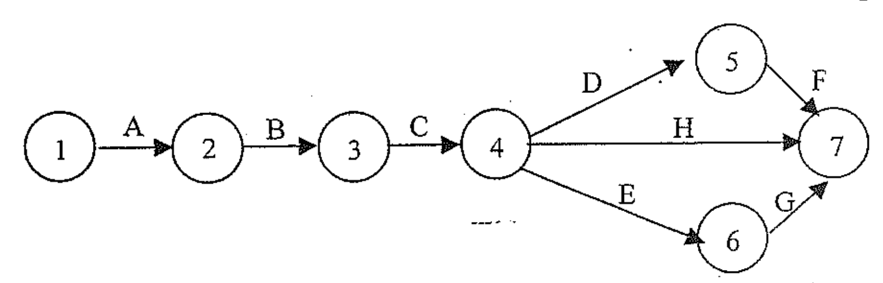
2- النشاط E, D يمكن البدء بهما معاً بعد إنهاء النشاط C.

3- النشاط F يتبع النشاط D والنشاط G يتبع E.

4- النشاط H يمكن أن يبدأ بعد النشاط C.

المطلوب: رسم شبكة الأعمال للنشاطات الثمانية التي تستوفي علاقات الترتيب أعلاه.

الحل:

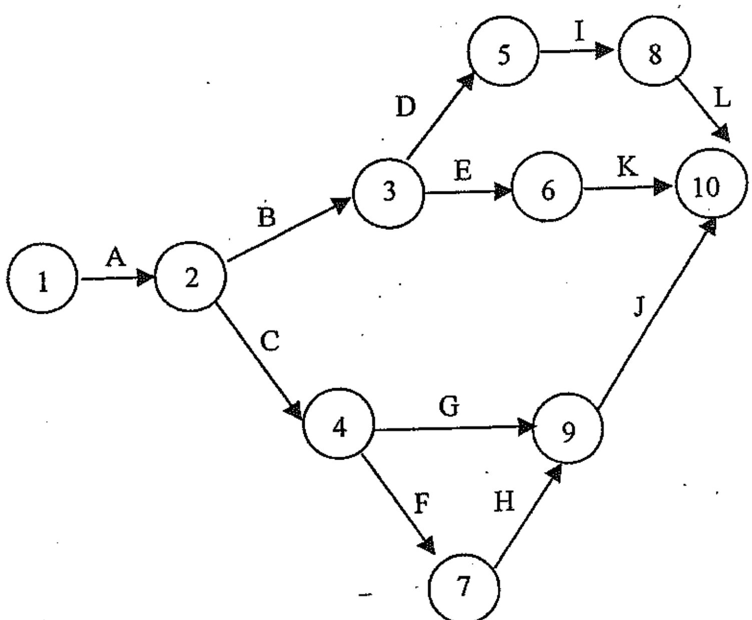


مثال2: الجدول التالي يظهر الأنشطة المختلفة والأنشطة السابقة لها التي يتطلبها إنجاز مشروع معين.

النشاط	النشاط السابق
A	–
B	A
C	A
D	B
E	B
F	C
G	C
H	F
I	D
J	G.H
K	E
L	I

المطلوب: رسم شبكة الأعمال التي تستوفي علاقات الترتيب للنشاطات السابقة:

الحل:



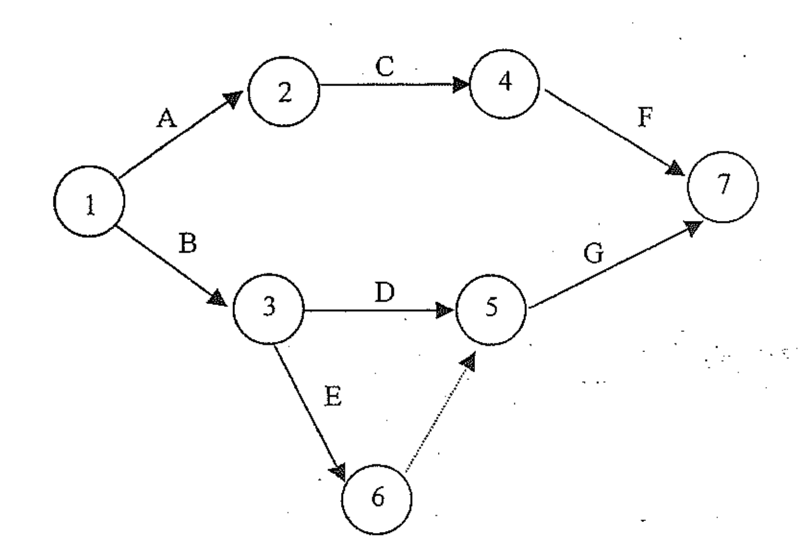
مثال 3: الجدول التالي يظهر الأنشطة والأنشطة السابقة لها التي يتطلبها إنجاز مشروع معين:

النشاط السابق	النشاط
-	A
-	B
A	C
B	D
B	E
C	F
E	G

المطلوب: رسم شبكة الأعمال التي تستوفي علاقات الترتيب للنشاطات السابقة.

الحل:

حيث أن النشاط B, A ليس لهما أنشطة سابقة فهي إذاً نشاطات بداية يمكن تنفيذها في نفس الوقت كما يلي:



التحليل الزمني لشبكات الأعمال:

الهدف الأساسي لاستخدام التحليل الشبكي هو لتبيان أهمية الوقت في عملية الإنجاز، وتوقع الأوقات اللازمة لإنجاز كل نشاط يعتمد على الطريقة المتبعة في تحليل الشبكة، وطرق التحليل الزمني لشبكات الأعمال هي:

1- طريقة المسار الحرج (CPM) Critical Path Method.

2-طريقة تقييم ومراجعة البرامج ؛ Program Evaluation and Review Technique (PERT)

فإذا كانت الطريقة المستخدمة هي طريقة المسار الحرج فإن تقدير الوقت اللازم لإنجاز النشاط يحدد بشكل مؤكد أو حتمي أما إذا كانت الطريقة المستخدمة هي طريق (بيرت) فإن تقدير الوقت المتوقع لإنجاز النشاط يحدد بشكل احتمالي غير مؤكد معتمدة على ثلاثة أزمنة احتمالية هي:

أ- الزمن التفاؤلي.

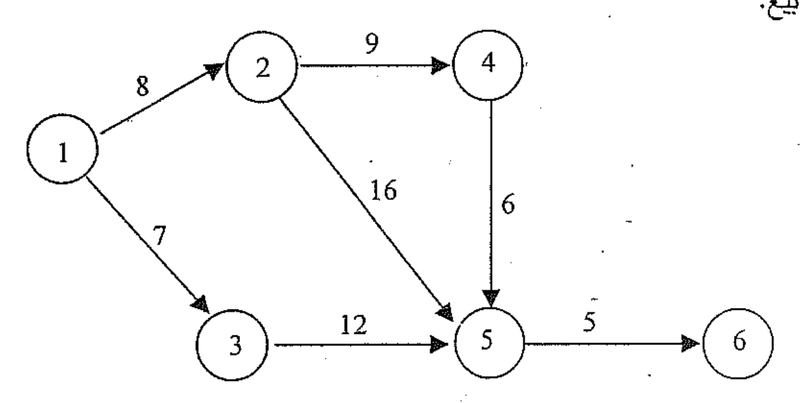
ب- الزمن الأكثر احتمالاً.

جـ-الزمن التشاؤمي.

1- طريقة المسار الحرج (CPM):

ذكرنا سابقاً بأن مبدأ شبكة الأعمال قائم على أساس أن أي مشروع يجب تقسيمه إلى عدد من مراحل التنفيذ (الأنشطة) المتتابعة زمنيا وفق تسلسل منطقي وبحيث ينتهي كل نشاط بحدث. فبعد رسم شبكة الأعمال بأحداثها ونشاطاتها والأوقات اللازمة لإنجاز كل حدث فيها يتم تحديد المسار الحرج من بين المسارات المختلفة في الشبكة وهو المسار الذي يستغرق أطول وقت زمني من بين المسارات في الشبكة والذي يُشير إلى أقصر مدة زمنية ممكنة لإنجاز المشروع. أي أن الفترة الزمنية المتوقعة لإنجاز أي مشروع تساوي فترة المسار

الحرج، والأنشطة الواقعة على المسار الحرج هي أنشطة حرجة أيضاً وبالتالي فإن أي تأخير في أحدها سيؤدي إلى زيادة طول المسار الحرج أي زيادة المدة الزمنية اللازمة لإنجاز المشروع ككل. لذلك فإن اختصار فترة إنجاز المشروع يجب أن يتم على أساس اختصار فترة إنجاز النشاطات الحرجة. أما باقي النشاطات فهي نشاطات غير حرجة لأنها أقصر من المسار الحرج وبالتالي فهي تحتمل التأخير دون أن يؤدي ذلك إلى زيادة المدة الزمنية للمشروع. والفرق بين طول المسار الحرج وطول المسار غير الحرج يسمى بالوقت الفائض للمسار غير الحرج.وتعتبر هذه الطريقة أحد طرق احتساب المسار الحرج، وللمزيد من التوضيح نفترض شبكة الأعمال التالية علماً بأن زمن الأنشطة الواردة فيها بالأسابيع.



نلاحظ في هذه الشبكة وجود ثلاثة مسارات متحملة للشبكة وهي:

- المسار الأول: ويشتمل على النشاطات التالية:

(6-5) ← (5-4) ← (4-2) ← (2-1)

وزمن هذا المسار هو:

8 + 9 + 6 + 5 = 28 أسبوعاً

- المسار الثاني: ويشتمل على النشاطات التالية:

.(6 - 5) ← (5-2) ← (2 - 1)

وزمن هذا المسار هو:

8 + 16 + 5 = 29 أسبوعاً

- المسار الثالث: ويشتمل على النشاطات التالية

(6 - 5) ← (5 - 3) ← (3 - 1)

وزمن هذا المسار هو:

7 + 12 + 5 = 24 أسبوعاً

نلاحظ بعد استخراج أطوال جميع المسارات بأن المسار الثاني كان أطولها فهو إذاً المسار الحرج والذي يمثل الزمن الكلي للمشروع وهو 29 أسبوعاً. وبالتالي فإن الوقت الفائض للمسار الأول يساوي أسبوعاً واحداً وللمسار الثالث يساوي خمسة أسابيع والأنشطة الحرجة هي (1-2)، (2-5)، (5-6) وأي تأخير في إنجازها سيؤدي إلى زيادة المدة الزمنية اللازمة لإنجاز المشروع.

مثال: الجدول التالي يظهر عشرة أنشطة متتابعة يتطلبها إنجاز مشروع معين والزمن اللازم لإنجاز كل نشاط مقاس بالأشهر.

الأنشطة	1-0	2-1	3-1	4-2	5-2	4-3	6-3	7-4	7-5	7-6
الفترة الزمنية	2	8	10	6	3	3	7	5	2	8

المطلوب:

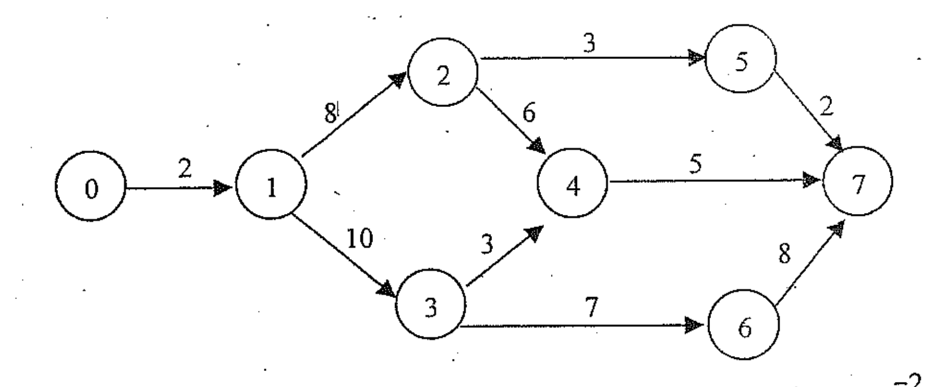
1- رسم شبكة أعمال هذا المشروع.

2- تحديد كافة المسارات.

3- الزمن الكلي الذي يتطلبه إنجاز المشروع.

الحل:

-1



-2

- المسار الأول (1- 0) ← (2 - 1) ← (5-2) ← (7-5)

2 + 8 + 3 + 2 = 15 شهراً

- المسار الثاني (1-0) ← (2-1) ← (4-2) ← (7-4)

2 + 8 + 6 + 5 = 21 شهراً

- المسار الثالث (1-0) ← (3-1) ← (6-3) ← (7-6)

2 + 10 + 7 + 8 = 27 شهراً

- المسار الرابع (1-0) ← (3-1) ← (4-3) ← (7-4)

2 + 10 + 3 + 5 = 20 شهراً

3- الزمن الكلي للمشروع هو زمن المسار الحرج، والمسار الثالث هو المسار الحرج لأنه أطول المسارات، أي أن الزمن الكلي للمشروع هو 27 شهراً.

أما الطريقة الثانية التي تستخدم لحساب المسار الحرج وخاصة في نماذج المشاريع الكبيرة ذات المسارات الكثيرة والمعقدة فهي طريقة المرور الأمامي والمرور الخلفي.

المرور الأمامي (الأزمنة المبكرة):

تتطلب هذه الطريقة احتساب الزمن الكلي للمشروع ابتداءً من حدث البداية حتى حدث النهاية وذلك باستخراج زمن البداية المبكرة Early start (ES) وزمن النهاية المبكرة Early Finish (EF) لكل حدث في شبكة الأعمال. حيث يعرف زمن البداية المبكرة بأنه أدنى نقطة زمنية ممكنة للبدء في نشاط، ويعرف زمن النهاية المبكرة بأنه أدنى نقطة زمنية ممكنة للانتهاء من نشاط. ويتم احتساب زمن البداية والنهاية المبكرة للأحداث وفقاً للاحتمالات التالية:

أ- عدم وجود حدث سابق.

إذا كان الحدث (A) هو حدث بداية كما في الشكل التالي:

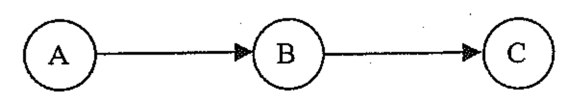
A —ES————EF→ B

فهذا يعني أن لا نشاط سابق له وبالتالي فإن زمن البداية المبكرة لحدث البداية هذا يساوي صفراً. أما زمن النهاية المبكرة له فهو الزمن "t" الذي يستغرقه النشاط A كما يلي:

A —[ES=0 t EF=t]→ B

ب- وجود حدث واحد سابق.

في حالة وجود حدث واحد (B) سابق للحدث قيد الدرس (C) كما في الشكل التالي:

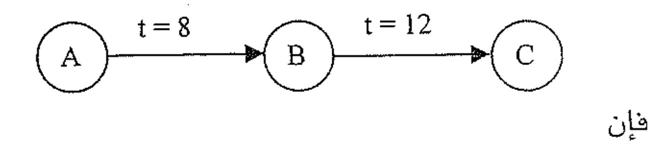


فإن زمن البداية المبكر للحدث (B) يساوي زمن النهاية المبكر للحدث A.
وزمن النهاية المبكرة للحدث (B) يساوي زمن البداية المبكر للحدث (B) مضافا إليها الزمن t الذي يستغرقه الحدث B.

$$ES_B = EF_A$$

$$EF_B = ES_B + t_B$$

فلو فضنا الشبكة التالية:



فإن

$$ES_A = 0$$

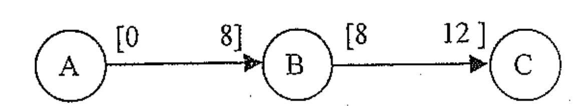
$$EF_A = ES_A + t$$

$$= 0 + 8 = 8$$

$$ES_B = EF_A = 8$$

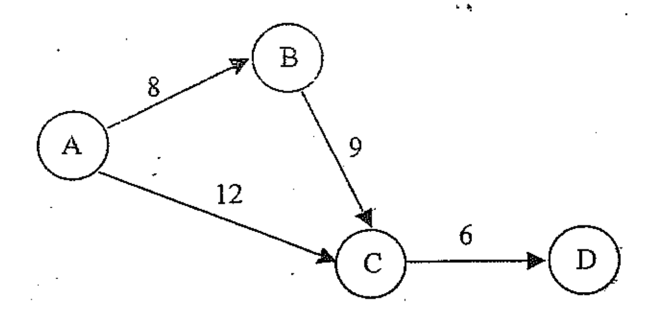
$$EF_B = ES_B + t$$

$$= 8 + 12 = 20$$

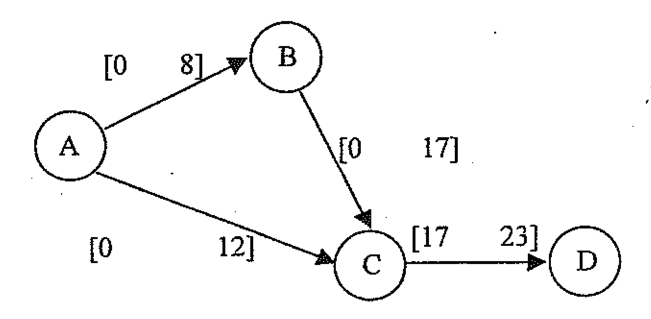


جـ- وجود أكثر من حدث سابق:

في حالة وجود أكثر من حدث سابق للحدث قيد الدرس، فإن زمن البداية المبكرة (ES) لهذا الحدث هو أكبر زمن نهاية (EF) لانتهاء أي من الأنشطة الداخلة فيه فلو فرضنا الشبكة التالية:



فإن زمن البداية المبكرة للحدث (D) يساوي أكبر زمن نهاية مبكرة لوقوع الحدث (C) المتولدة من الأنشطة (A-C) و (B-C).



نلاحظ بان أكبر زمن نهاية مبكرة لوقوع الحدث (C) يساوي 17 وهو بالتالي زمن البداية المبكرة للحدث (D) وبالتالي فإن زمن النهاية المبكرة للحدث (D) يساوي 23.

المرور الخلفي (الأزمنة المتأخرة):

تتطلب هذه الطريقة احتساب الزمن الكلي للمشروع ابتداءً من حدث النهاية والسير بالاتجاه المعاكس حتى حدث البداية وذلك باستخراج زمن البداية المتأخرة Latest Start (LS) ومن النهاية (الإنجاز) المتأخرة Latest Finish (LF) لكافة

الأحداث في الشبكة. حيث يعرف زمن البداية المتأخرة بأنه أقصى نقطة زمنية للبدء بالنشاط دون أن يؤدي إلى تأخير في إنجاز الحدث حسب الوقت المحدد له. ويعرف زمن النهاية المتأخرة بأنه أقصى نقطة زمنية مسموح بها لإنهاء النشاط دون أن يؤدي إلى إطالة أمد إنجاز الحدث حسب الوقت المحدد له. ويتم احتساب زمن البداية والنهاية المتأخرة للأحداث وفقاً للاحتمالات التالية:

أ- عدم وجود حدث لاحق:

إذا كان الحدث (D) هو حدث النهاية كما في الشبكة السابقة فهذا يعني أن لا نشاط لاحق له وبالتالي فإن زمن النهاية المتأخرة (LF) له يساوي المدة الزمنية اللازمة لإنجاز المشروع ككل أي يساوي زمن النهاية المبكرة (EF) للحدث (D) والمساوية (23). أي أن:

$$LF_D = EF_D = 23$$

وبالتالي يكون زمن البداية المتأخرة (LS) له هو زمن النهاية المتأخرة (LF) ناقصاً الزمن (t) الذي يستغرقه الحدث D.

أي أن:

$$LS = LF - t$$

$$= 23 - 6$$

$$= 17$$

$$LS = 17$$

ب- وجود حدث واحد لاحق.

في حال وجود حدث واحد (X) لاحق للحدث (W)قيد الدرس كما يلي:



فإن زمن النهاية المتأخرة لوقوع الحدث (W) يساوي زمن البداية المتأخرة لوقوع الحدث اللاحق (X).

$$LF_W = LS_X$$

علماً بأن زمن البداية المتأخرة للحدث (X) يساوي زمن النهاية المتأخرة للحدث (X) ناقص الزمن (t) الذي يستغرقه الحدث (X).

جـ- وجود أكثر من حدث لاحق.

في حالة وجود أكثر من حدث لاحق للحدث قيد الدرس، فإن زمن النهاية المتأخرة (LF) لوقوع هذا الحدث هو أصغر زمن بداية متأخرة (LS) لأحد الأنشطة المتفرعة من ذلك الحدث.

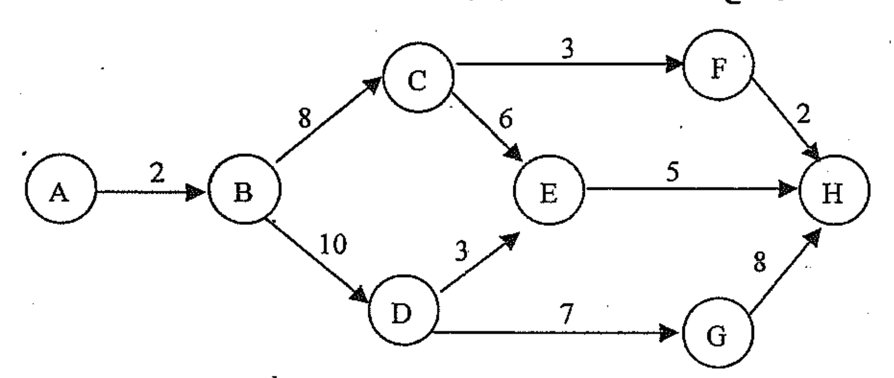
ومن حساب الأزمنة المبكرة والأزمنة المتأخرة ينتج زمن آخر يسمى الزمن الفائض ويتم التوصل إليه باستخدام إحدى الطرق التالية:

1- الزمن الفائض للحدث = زمن البداية المتأخرة للحدث - زمن البداية المبكرة للحدث

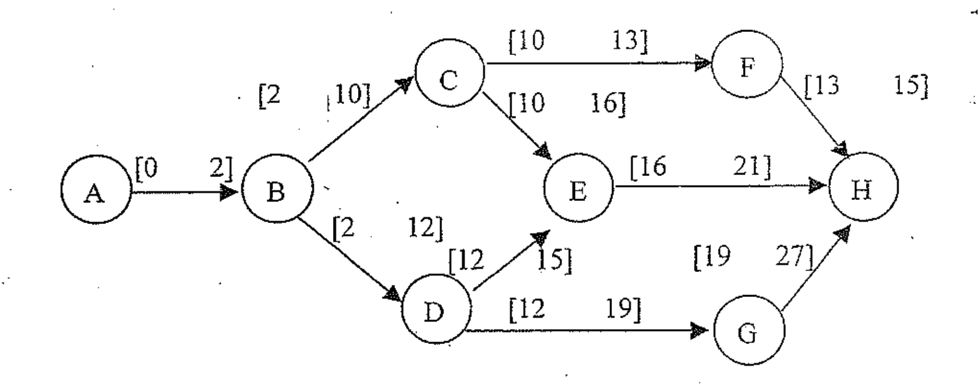
2- الزمن الفائض للحدث = زمن النهاية المتأخرة للحدث - زمن النهاية المبكرة للحدث

والأنشطة التي زمنها الفائض يساوي صفر من بين كافة أنشطة الشبكة هي أنشطة حرجة تمثل في مجموعها المسار الحرج.

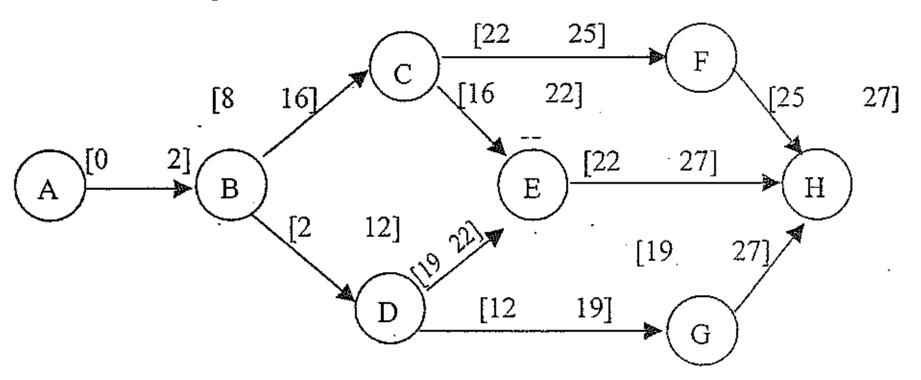
ولتوضيح حسابات الأزمنة المبكرة والمتأخرة نفترض شبكة الأعمال التالية:



فإن زمن البداية المبكرة والنهاية المبكرة لهذه الشبكة هو كما يلي:



وزمن النهاية المتأخرة والبداية المتأخرة لها هو كما يلي:



ولتحديد المسار الحرج لهذه الشبكة علينا احتساب الوقت الفائض لكافة الأنشطة فيها من خلال حاصل الفرق بين البدايات المتأخرة والبدايات المبكرة أو من خلال الفرق بين النهايات المتأخرة والنهايات المبكرة كما في الجدول التالي:

Activity	Activity time	ES	EF	LS	LF	Total Float
A-B	2	0	2	0	2	0
B-C	8	2	10	8	16	6
B-D	10	2	12	2	12	0
C-E	6	10	16	16	22	6
C-F	3	10	13	22	25	12
D-E	3	12	15	19	22	7
D-G	7	12	19	12	19	0
E-H	5	16	21	22	27	6
F-H	2	13	15	25	27	12
G-H	8	19	27	19	27	0

ومن هذا الجدول نلاحظ بان الأنشطة (A-B), (B-D), (D-G), (G-H) لها وقت فائض كلي مساوي للصفر وبالتالي فهي أنشطة حرجة وأي تأخير في تنفيذ أحدها يعني تأخير في تنفيذ المشروع ككل عن الوقت المحدد، وعليه فإن المسار الحجر لهذه الشبكة هو $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow G \rightarrow H$ أما باقي النشاطات في الشبكة فإن الوقت الفائض لها أكبر من الصفر وهي بذلك نشاطات غير حرجة يسمح بالتأخير في تنفيذها في حدود الفائض الموجود فيها.

3- طريقة تقييم ومراجعة البرامج (PERT):

ذكرنا سابقاً بأن الهدف الأساسي لاستخدام التحليل الشبكي هو لإظهار أهمية الوقت في عملية الإنجاز. وتقدير الوقت المتوقع لإنجاز أي نشاط حسب طريقة بيرت يحدد بشكل احتمالي غير مؤكد بعكس طريقة المسار الحرج المعتمدة على الزمن المؤكد والثابت للنشاطات المتشابهة في المشروعات المختلفة

المتأتي من توفر المعلومات والخبرات السابقة نتيجة لتكرارها. فطريقة بيرت تلائم المشروعات الجديدة غير المتكررة التي يصعب فيها وضع تقدير دقيق للزمن اللازم لإنهاء كل نشاط لعدم توفر معلومات وخبرات سابقة، لهذا فهي تعتمد على ثلاثة تقديرات للوقت اللازم لإنجاز النشاطات هي:

1- الزمن التفاؤلي Optimistic time.

وهو الزمن الأدنى المتوقع لتنفيذ النشاط على اعتبار أن كافة الأمور في المشروع تسير على ما يرام وبنفس الإمكانات المتاحة ويرمز له بالرمز (a).

2- الزمن الأكثر احتمالاً Most Probable time:

وهو الزمن الطبيعي المتوقع لتنفيذ النشاط في الظروف والأحوال الاعتيادية ويرمز له بالرمز (M).

3- الزمن التشاؤمي Pessimistic time:

وهو الزمن الأعلى المتوقع لتنفيذ النشاط في الظروف السيئة والمعوقات التي تؤخر خطوات التنفيذ ويرمز له بالرمز (b).

ومن هذه التقديرات الثلاثة لزمن كل نشاط يتطلب أسلوب بيرت احتساب متوسط حسابي لهم وفق توزيع بيتا يطلق عليه الزمن المتوقع لكل نشاط في الشبكة وفقاً للمعادلة التالية:

$$\text{Expected time (Et)} = \frac{a + 4M + b}{6}$$

وبعد استخراج الزمن المتوقع لكل نشاط حسب المعادلة أعلاه، نرسم شبكة بيرت ثم نحدد أطول المسارات فيها ليمثل المسار الحرج. أي أن المسار الحرج لشبكة بيرت هو مجموع الأزمنة المتوقعة للأنشطة الحرجة المكونة له.

مثال: الجدول التالي يظهر عشرة أنشطة متتابعة يتطلبها إنجاز مشروع معين والزمن اللازم لذلك بالأسابيع:

Activity	a	M	b
A-B	4	5	12
A-C	1	1.5	5
B-C	2	3	4
B-D	3	4	11
B-E	2	3	4
C-F	1.5	2	2.5
D-G	1.5	3	4.5
E-G	2.5	3.5	7.5
F-G	1.5	2	2.5
G-H	1	2	3

المطلوب:

1- احسب الوقت المتوقع بالأسبوع لكل نشاط.

2- ارسم شبكة بيرت وحدد المسار الحرج.

الحل:

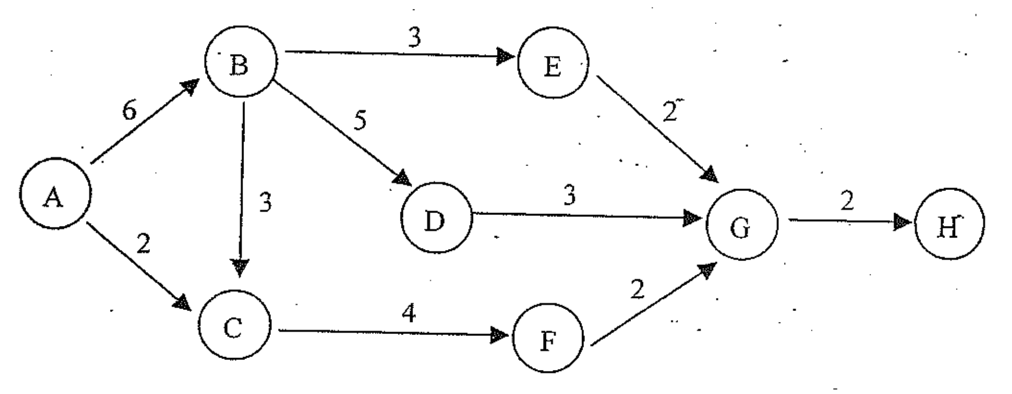
1- لو أخذنا النشاط الأول ذو المسار (A-B) كمثال، سنلاحظ بان هذا النشاط يتطلب (4) أسابيع في الظروف الأكثر تفاؤلا و (12) أسبوع في الظروف الأكثر تشاؤما و (5) أسابيع في الظروف الاعتيادية. وبالتالي فإن المتوسط الحسابي لهذا النشاط هو:

$$Et = \frac{a+4M+b}{6} = \frac{4+(4)(5)+12}{6} = \frac{36}{6} = 6 \text{ weeks}$$

وباستخدام نفس الأسلوب، فإن الوقت المتوقع لباقي النشاطات يظهر كما في الجدول التالي:

Activity	A-B	A-C	B-C	B-D	B-E	C-F	D-G	E-G	F-G	G-H
(Et)	6	2	3	5	3	4	3	2	2	2

-2



ولتحديد المسار الحرج في هذه الشبكة علينا في البداية تحديد كافة المسارات المحتملة فيها والزمن الذي يستغرقه كل مسار، والمسار الذي يستغرق أطول وقت زمني هو المسار الحرج.

- المسار الأول: ويشتمل على النشاطات التالية:

(H-G) ← (G-E) ← (E-B) ← (B-A)

وزمن هذا المسار هو:

13 = 2 + 2 + 3 + 6 أسبوعاً

- المسار الثاني:

(H-G) ← (G-D) ← (D-B) ← (B-A)

وزمن هذا المسار هو:

16 = 2 + 3 + 5 + 6 أسبوعاً

- المسار الثالث:

(H-G) ← (G-F) ← (F-C) ← (C -B) ← (B-A)

وزمن هذا المسار هو:

17 = 2 + 2 + 4 + 3 + 6 أسبوعاً

- المسار الرابع:

(H-G) ← (G-F) ← (F-C) ← (C-A)

وزمن هذا المسار هو:

10 = 2 + 2 + 4 + 2 أسابيع

وحيث أن أطول المسارات هو المسار الثالث فهو إذاً المسار الحرج ذو الوقت المتوقع (17) أسبوعاً الذي يمثل الزمن الكلي لإنجاز المشروع ككل.

تباين الأنشطة الحرجة:

لا تكمن أهمية أسلوب بيرت في تحديد المسار الحرج لإنجاز المشروع فقط وإنما في إيجاد الاحتمالات المختلفة لإنجاز المشروع بأزمنة تختلف عن الزمن المتوقع له. وذلك بالاعتماد على التوزيع الطبيعي Normal distribution والذي يتطلب تحديد عدد الانحرافات المعيارية (Z) الواقعة بين الزمن المحدد من قبل إدارة المشروع والزمن المتوقع لتنفيذ المشروع لتحديد المساحة الواقعة تحت المنحنى الطبيعي من جدول التوزيع الطبيعي والتي تمثل احتمال إنجاز المشروع في الزمن المحدد. ويتم تحديد عدد الانحرافات المعيارية باستخدام العلاقة التالية:

القيمة المعيارية (Z) = (الزمن المحدد لإنجاز المشروع − الزمن المتوقع لإنجاز المشروع) / (الانحراف المعياري لأزمنة النشاطات الحرجة)

حيث الانحراف المعياري = $\sqrt{\text{مجموع تباينات الأنشطة الحرجة}}$

وتباين النشاط الحرج = $\left(\frac{\text{الوقت المتشائم للنشاط - الوقت المتفائل للنشاط}}{6}\right)^2$

ولتوضيح هذه الطريقة، نعود إلى المثال السابق ونطلب إيجاد احتمال تنفيذ المشروع خلال 19 أسبوعاً أو أقل مثلاً.

الحل:

في البداية علينا استخرج التباين لكل نشاط حرج في الشبكة من خلال قانون التباين السابق، والجدول التالي يبين تباينات الأنشطة الحرجة.

الأنشطة الحرجة	B-A	C-B	F-C	G-F	H-G
التباين	1.78	0.12	0.028	0.028	0.12

الانحراف المعياري لأزمنة النشاطات الحرجة

$= \sqrt{0.12 + 0.028 + 0.028 + 0.12 + 1.78}$

$= \sqrt{2.076}$

$= 1.44$

احتمال تنفيذ المشروع خلال 19 أسبوعاً أو أقل هو:

$$Z = \frac{X - \overline{X}}{\sigma} = \frac{19-17}{1.44} = 1.38$$

ومن جدول المساحات الواقعة تحت المنحنى الطبيعي، نجد أن نسبة المساحة الواقعة تحت القيمة المعيارية (1.38) هي:

$$P(Z \le 1.38) = 0.9162$$

وهي تمثل احتمال تنفيذ المشروع خلال (19) إسبوعاً.

المراجع

1- الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية.

د. حسين اللطيف السامرائي - عمان دار الهلال.

2- بحوث العمليات وتطبيقاتها في وظائف المنشأة.

د. علي حسين علي وآخرون -عمان دار زهران.

3- مقدمة في بحوث العمليات

د. محمد الطراونة و د. سليمان عبيدات - 1989.

4- بحوث العمليات تطبيقات وخوارزميات

د. موفق محمد الكبيسي- عمان / دار الحامد 1999.

5- بحوث العمليات - نظرية وتطبيق

د. فؤاد الشيخ سالم - عمان دار مجدلاوي 1983.

6- بحوث العمليات

د.صباح الدين بقجة جي وآخرون - منشورات جامعة دمشق 1999.

7- الأساليب الكمية في الإدارة

د.منعم زمزير الموسوي - مؤسسة زهران 1996.

8- بحوث العمليات في التطبيق الاقتصادي

د. محمد فخري مكي - مصر - دار السعادة للطباعة 1999.

9- Problems in operation Research Dr. D.S. HIRA S. CHAND & Company LTD - New Delhl-1997.